

チェビシェフ・フィルタの周波数補正問題(1.03 版)

2024 年 6 月 8 日(初版)

2024 年 11 月 7 日(1.03 版)

マイコン技研 Maikon-Giken

澤田 明 Akira Sawada

注:各社のツールの状況は初版発行時点のものである

1. はじめに

チェビシェフ特性のアクティブ・フィルタを設計する場合、希望するカットオフ周波数に周波数補正値を掛けて回路設計しなければならない。その周波数補正値が 60%もずれている設計表が出回っていると聞くと、いくらなんでもそれは無かろうと疑われるかもしれないが、現実には参考文献 1 はそうになっている。二次 10kHz で設計した場合、特性図では 10kHz で-3dB になっているように見えるが、実際には 16kHz ぐらいのところまで-3dB になる。

参考文献 1 は例外ではなく、例えばテキサス・インスツルメンツ社の[フィルタ・デザイン・ツール](#)を使うとそういう結果が出てくる。1kHz, リップル 0.25dB, 次数指定 2 のチェビシェフ・ローパス・フィルタを設計すると、ゲインが-3dB となる周波数が 1.6kHz ぐらいのところにくる。このツールの場合には振幅特性図にはそれが反映されているので、何かおかしいことにすぐ気が付くであろう。注意深く読めば、FILTER RESPONSE の Fp の注釈として「Cheby's passband is set at the final rolloff of its ripple. All others' passband are set at -3dB」と書かれていて、Fp 欄に入力する値がカットオフ周波数では無いことがわかる。

表現がわかりにくいですが、TI のツールは「減衰が許容リップル値以内となる周波数を入力して設計」するようになっている。しかし大多数の人はカットオフ周波数以上での減衰が急激であることを期待してチェビシェフ特性を選択するであろうから、カットオフ周波数で設計できなければ話にならない。

TI のツールは注釈が書かれているし、特性図もずれた値が表示されているのでまだ良いが、参考文献 1 は何の注釈もなく、間違った特性図が示されているので問題である。

参考文献 2,3 はリップル 0.5dB 以外はカットオフ周波数からの補正値を記載しているが、別の箇所の説明では別表による補正が必要と書かれている。実際に補正が必要なのは 0.5dB の表の 2~9 次だけなので、混乱を招く。また、偶数次は振幅が許容リップル分上昇することは書かれているが、それをゲイン補正で差し引く必要がある点は明記されてない。ゲインが加算されたところを基準に-3dB 周波数補正値が算出されているため、差し引かずに設計すると当然カットオフ周波数がずれたように見える。

アナログ・デバイセズ社の[アナログ・フィルター・ウィザード](#)の場合はカットオフ周波数から設計してくれるが、偶数次のゲイン加算を無視して入力レベルから-3dB のところを基準に補正値を計算しているため、例えば二次のカットオフ周波数はリップル 0.25dB で 2%, 0.5dB で 4%程度ずれる。

これら混乱した状況を鑑みて、カットオフ周波数からの補正値の算出方法を改めて示すとともに、正しく回路設計に適用できるように偶数次ゲイン加算についても改めて説明する。

2. 混乱を招く背景

種々の混乱を招いている一因として、遮断周波数(cutoff frequency)と折点周波数(break point frequency)が混同されている点があると思われる。1次フィルタやバターワース特性は図1に示すように、

$$\begin{aligned} & \text{折点角周波数(回路設計上の角周波数)} \omega_0 \\ & = \text{遮断角周波数(ゲインが } 1/\sqrt{2} \text{ (-3dB)になる角周波数)} \omega_c \\ & = 1 \text{ (1rad/s で規格化した角周波数)} \end{aligned}$$

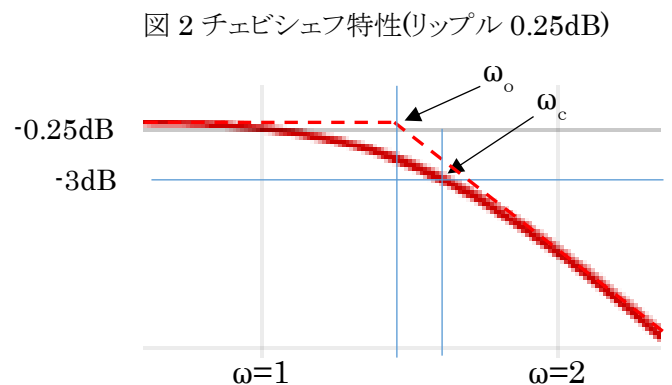
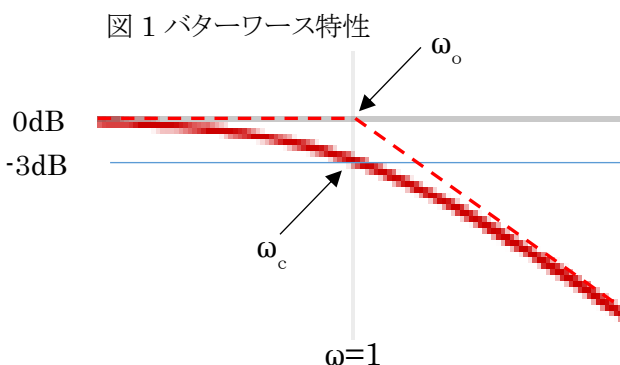
となる特徴があり、このため ω_0 を遮断(カットオフ)角周波数と説明しているのを良く見かける。というより折点が遮断とは別ものであることは古い論文(参考文献 4)には出てくるが、最近の解説書では見かけたことが無い。これが誤解を生む原因と言えるであろう。ところが実際にはチェビシェフ特性は図2に示すように $1 < \omega_0 < \omega_c$ となっていて、別物として扱う必要がある。

①回路設計に必要な折点角周波数 ω_0 はカットオフ角周波数とは限らない

例えばサレン・キー型や多重帰還型の回路では、伝達関数で示される $\omega_0 = 1/\sqrt{(R1 R2 C1 C2)}$ の関係より R や C の値を算出する。ここで ω_0 を「カットオフ角周波数」と説明しているものを見かけるが、しかしそれはゲインが $1/\sqrt{2}$ (-3dB)になることを意味しない。バターワース特性に限れば間違いではないが、他の特性の場合は-3dB にはならない。ただ最近では「折点角周波数」という用語が浸透してないように感じられるので、「回路設計上の折点角周波数」などと呼んだ方が分かりやすいかもしれない。

②規格化角周波数 $\omega=1$ はカットオフ角周波数とは限らない

これもバターワース特性に限れば正しいが、他の特性の場合、「1rad/s で規格化」した角周波数 $\omega=1$ ではゲインは $1/\sqrt{2}$ (-3dB)にならない。しかし多くの振幅特性図を見ると全ての特性が1のところでは-3dBになっている。これは「カットオフ周波数 f_c で規格化」した図であり、バターワース特性以外の場合は「1rad/s で規格化」した振幅特性図とは異なる。



以下、二次LPFの例で具体的な数値で補足する。
まずバターワース特性の伝達関数は次式となる。

$$V_{out}/V_{in} = \omega_o^2 / \left(s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2 \right) = 1 / (s^2 + \sqrt{2}s + 1) \quad (\text{式 2-1})$$

この式より、 $\omega_o = 1$ であり、 $\omega = 1$ ($s = j\omega = j$) のゲイン(絶対値)が $1/\sqrt{2}$ であることが容易に見て取れる。

一方、チェビシェフ特性の伝達関数は、リップル 0.25dB の場合次式となる。

$$\begin{aligned} V_{out}/V_{in} &= H\omega_o^2 / \left(s^2 + \frac{\omega_o}{Q}s + \omega_o^2 \right) \\ &= 0.9716 \cdot 2.114 / (s^2 + 1.797s + 2.114) \end{aligned} \quad (\text{式 2-2})$$

これより、

$$\omega_o = \sqrt{2.114} = 1.454 \quad (\text{式 2-3})$$

$\omega = 1$ のゲインは

$$G(\omega) = 0.9716 \cdot 2.114 / \sqrt{(2.114 - 1)^2 + 1.797^2} = 0.9716 \quad (-0.25\text{dB}) \quad (\text{式 2-4})$$

一方、ゲインが $1/\sqrt{2}$ になる角周波数 ω_c は、二乗した値で計算すると、

$$G(\omega_c)^2 = (0.9716 \cdot 2.114)^2 / \left((2.114 - \omega_c^2)^2 + 1.797^2 \omega_c^2 \right) = 1/2 \quad (\text{式 2-5})$$

より

$$\begin{aligned} \omega_c^4 + (1.797^2 - 2 \cdot 2.114) \omega_c^2 + 2.114^2 (1 - 2 \cdot 0.9716^2) &= 0 \\ \omega_c^4 + \omega_c^2 - 3.969 &= 0 \\ \omega_c &= 1.598 \end{aligned} \quad (\text{式 2-6})$$

が得られる。

カットオフ周波数から回路設計上の折点周波数を得るための周波数補正值 foc は

$$\text{foc} = \omega_o / \omega_c = 0.9098 \quad (\text{式 2-7})$$

となる(実際の計算は 15 桁精度で行っている)。例えばカットオフ周波数 1kHz のフィルタを所望するならば、909.8Hz で設計すれば良いことになる。

3. 回路設計上の折点角周波数 ω_o および Q の求め方(一般式)

n 次チェビシェフ・フィルタのポールの位置を $\alpha i + j\beta i$ とすると、

$$\alpha i = -\sin\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \sinh(A) \quad (\text{式 3-1})$$

$$\beta i = -\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \cosh(A) \quad (\text{式 3-2})$$

$i = 1, 2, \dots, n/2$ (偶数次) または $(n-1)/2$ (奇数次)

$$A = \frac{1}{n} \sinh^{-1}\left(1/\sqrt{10^{RP/10} - 1}\right) \quad (\text{式 3-3})$$

RP : 許容リップル(dB)

となる。 ω_o と Q は、

$$\omega_{oi} = \sqrt{\alpha^2 i^2 + \beta^2 i^2} \quad (\text{式 3-4})$$

$$Q_i = -\omega_{oi} / (2\alpha i) \quad (\text{式 3-5})$$

で求められる。ただし、奇数次の 1 次項の ω_o は、

$$\omega_{o0} = \sinh(A) \quad (\text{式 3-6})$$

で求まる。なお $i = 1, 2, \dots$ と昇順で書いたが実際の表の順序としては Q の小さい順に並べるため、 i は降順で計算する。

4. ゲインが $1/\sqrt{2}$ になるカットオフ角周波数 ω_c および周波数補正值 foci の求め方(一般式)

任意の減衰量 AP(dB)の角周波数は、以下の式で求まる。

$$\omega_{AP} = \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{10^{AP/10} - 1}{10^{RP/10} - 1}}\right)\right) \quad (\text{式 4-1})$$

これより減衰量 $\sqrt{2}$ (3.0103dB)となるカットオフ角周波数 ω_c は以下の式で求まる。

$$\omega_c = \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{10^{RP/10} - 1}}\right)\right) \quad (\text{式 4-2})$$

なお偶数次の場合はゲイン加算されたところから減衰量を規定する(詳細次項参照)。

周波数補正值 foci は次の式で求まる。

$$\text{foci} = \omega_{oi} / \omega_c \quad (\text{式 4-3})$$

5. 偶数次のゲイン加算

チェビシェフ・フィルタは奇数次と偶数次で特性が若干異なる。

許容リップル 0.5dB の例で見ると、奇数次は図 3 のように、規格化角周波数 $\omega=1$ までの区間がゲイン 0dB \sim -0.5dB の範囲となり、 $\omega=1$ を過ぎると減衰量が 0.5dB を超えて増加の一途をたどる。

一方、偶数次の場合は、入力側から見ると $\omega=1$ までの区間がゲイン 0dB \sim +0.5dB の範囲となり、 $\omega=1$ を過ぎると減衰量が 0dB を超えて増加の一途をたどる。つまり、奇数次に比べると許容リップル分のゲインが加算されているに等しい。逆に出力レベルを入力レベルに合わせたい場合は、許容リップル分のアッテネータを入れなければならない。

図 3 奇数次の特性

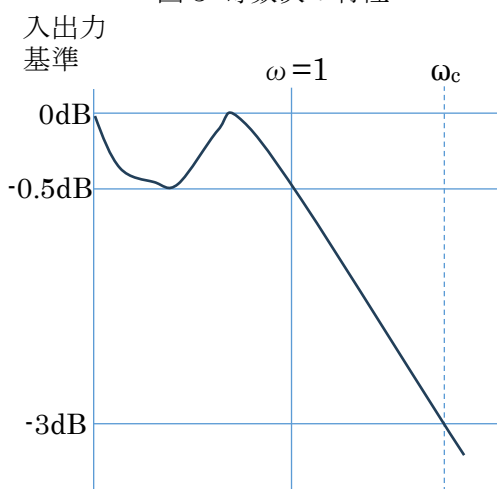
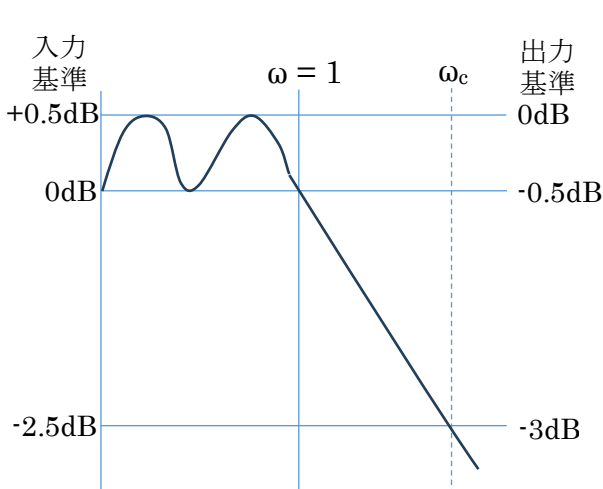


図 4 偶数次の特性



これを式で表すと、

$$\text{実ゲイン(dB)} = \text{回路設計上のゲイン(dB)} + \text{許容リップル値(dB)} \quad (\text{式 4-4})$$

となる。もし仕様として実ゲインが決まっているのであれば、

$$\text{回路設計上のゲイン(dB)} = \text{実ゲイン(dB)} - \text{許容リップル値(dB)} \quad (\text{式 4-5})$$

として設計しなければならない。

特に入出力振幅が許容値いっぱいのいわゆるフルスイング設計の場合は、回路設計ゲインを 0dB にしてしまうと許容リップル分だけ信号がクリップされて歪んでしまう。従って必ず -許容リップル値(dB)のゲインで設計しなければならない。

多重帰還型の回路であれば 0dB 未満のゲインでも設計できるので問題ない。サレン・キー型の回路はゲインを 0dB 未満にできないので、アッテネータを入れる必要がある。ただし LPF の場合は図 5 の入力抵抗 R1 を図 6 のように分圧回路構成にすれば実現できる。-許容リップル値(dB)を倍率に換算した値を A、入力抵抗値を R1、分圧回路の抵抗を Ra, Rb とすると、

$$R1 = Ra \cdot Rb / (Ra + Rb)$$

$$A = R_b / (R_a + R_b)$$

より、以下のように配分すればよい。

$$R_a = R_1 / A \quad (\text{式 4-6})$$

$$R_b = R_1 / (1 - A) \quad (\text{式 4-7})$$

ただし、許容リップル値が小さいと A が 1 に近くなり R_b が非常に大きくなる。これを回避したい場合は、オペアンプ回路のゲインを例えば 1.25(倍)として R₁ を再計算し、A を 1.25 で割れば良い。

図 5 サレン・キー型 LPF (ゲイン ≥ 0dB)

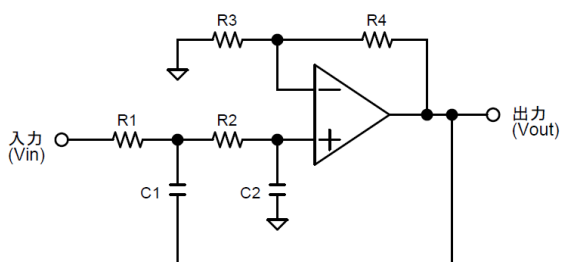
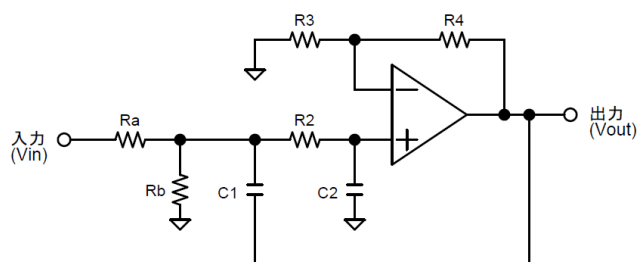


図 6 サレン・キー型 LPF (ゲイン < 0dB も可)



6. 計算プログラム例

別途資料 Chebyshev.BAS に [10進 BASIC](#) 用のソース・プログラムを示す。実行開始後にファイル名と許容リップル値を入力すれば、2～10 次の周波数補正值 foc, Q をファイルに出力する。既存のファイル名を指定した場合は追記を行う。

11 次以上が必要な場合は、12 行目の nmax を変更すればよい。

7. 周波数補正值 foc および Q の計算結果

表 1 に 2 次～7 次までの周波数補正值 foc および Q の計算結果を示す。

表 1 チェビシェフ特性の設計表

次数	段目	許容リップル 0.25 dB		許容リップル 0.5 dB	
		周波数補正值 foc	Q	周波数補正值 foc	Q
2*	1	0.90979	0.80925	0.88602	0.86372
3	1	0.61236	—	0.53659	—
	2	0.92346	1.50803	0.91552	1.70619
4*	1	0.59172	0.65725	0.54615	0.70511
	2	0.94575	2.53611	0.94343	2.94055
5	1	0.40134	—	0.34205	—
	2	0.67272	1.03593	0.65185	1.17781
	3	0.96134	3.87568	0.96080	4.54496
6*	1	0.41840	0.63703	0.38061	0.68364
	2	0.74797	1.55565	0.73785	1.81038
	3	0.97153	5.52042	0.97158	6.51285
7	1	0.29437	—	0.24869	—
	2	0.50898	0.95956	0.48914	1.09155
	3	0.80403	2.19039	0.79870	2.57555
	4	0.97833	7.46782	0.97858	8.84180

*: 偶数次の回路設計ゲイン(dB) = 目標ゲイン(dB) - 許容リップル(dB) とすること。

■■参考文献■■

- (1)西野直樹, 今関雅敬 : トランジスタ技術エンジニア手帳 2024, トランジスタ技術 2024 年 5 月号別冊付録 1, CQ 出版社
- (2)アナログ・デバイス(株) : OP アンプによるフィルタ回路の設計, 2005 年, CQ 出版社
- (3)Hank Zumbahlen : アナログ・デバイスのアクティブ・フィルタ・デザイン・ツールの使い方, Rev.0, アプリケーション・ノート(AN-649) (<https://www.analog.com/jp/resources/app-notes/an-649.html>), アナログ・デバイス(株)
- (4)工藤道夫, 三浦興己 : RC アクティブフィルタの解析と設計, 1971 年, 信州大学工学部紀要 巻 30, p. 75-94
- (5) 著名なし : チェビシェフフィルター(<https://rohaki.web.fc2.com/chebi.pdf>), 2024 年訂正版

改訂履歴

版	日付	記事
1.0	2024/6/8	新規作成
1.02	2024/6/24	記号修正：周波数補正值の記号を foc に変更(fo は折点周波数とするため)
1.03	2024/11/7	参考文献(1)の年号誤記修正