

# コンデンサ優先のローパス・フィルタ設計法の導出

2024 年 11 月 8 日(初版)

マイコン技研 Maikon-Giken

澤田 明 Akira Sawada

## 1. はじめに

拙著『「コンデンサ値を先に決める」精度 1%の LPF 設計法』がトランジスタ技術 2024 年 12 月号 (CQ 出版社)に掲載された。本稿ではこの記事の設計式を導出する過程を参考として記す。合わせて回路の伝達関数の導出過程も参考として記す。もっとスマートな導出方法があるのかもしれないが、とにかく結果が正しく導出できれば良いとの考えから愚直に数式を展開した。

対象となるローパス・フィルタ回路は、サレン・キー型(図 1)および多重帰還型(図 2)である。

図 1. サレン・キー型ローパス・フィルタ回路

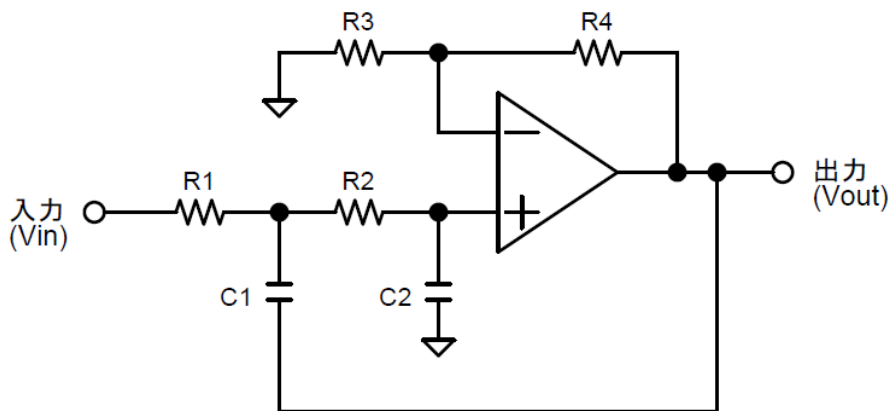
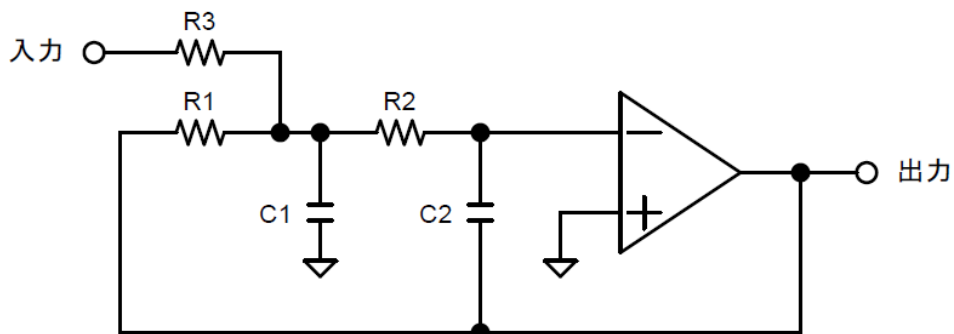


図 2. 多重帰還型ローパス・フィルタ回路



## 2. 設計式の導出

以下の導出過程は、ローパス・フィルタ回路の折点角周波数 $\omega_o$ と回路のクオリティQを求める式が既知であるものとして数式を展開している。 $\omega_o$ とQの求め方および回路の伝達関数の求め方については後述する。

なお最近の書物では $\omega_o$ をカットオフ角周波数(遮断角周波数)と呼ぶことが多いが、バターワース特性以外(ベッセル特性やチェビシェフ特性など)では、 $\omega_o$ におけるゲインが $1/\sqrt{2}$ にならないので、適切な用語とは言い難い。本稿では参考文献 1 にならって $\omega_o$ は折点角周波数(ブレイクポイント角周波数)と呼び、カットオフ角周波数(遮断角周波数) $\omega_c$ とは使い分けている。

### 2.1 サレン・キー型の設計式導出

サレン・キー型の折点角周波数 $\omega_o$ と回路のクオリティQ、ゲインHは次のように示される。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1 R2 C1 C2}} \quad (\text{式 2-1})$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{R2 \cdot C2}{R1 \cdot C1} + \sqrt{\frac{R1 \cdot C2}{R2 \cdot C1} - \frac{R4}{R3} \sqrt{\frac{R1 \cdot C1}{R2 \cdot C2}}}} \quad (\text{式 2-2})$$

$$H = 1 + \frac{R4}{R3} \quad (\text{式 2-3})$$

式 2-1, 式 2-2 を見ると、C1, C2 を先に決めても R1, R2 で調整できるのではないかという気がしてくる。そこで、

$$m = C2 / C1 \quad (\text{式 2-4})$$

$$n = R2 / R1 \quad (\text{式 2-5})$$

$$h = R4 / R3 \quad (\text{式 2-6})$$

とおくと、h はゲインから一意に決まり、m も C1, C2 を選定すれば求まるので、h, m から n が求まれば良いことになる。これらをまず Q を求める式に代入してみる。

$$Q = \frac{1}{\sqrt{n \cdot m + \sqrt{\frac{1}{n} \cdot m} - h \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}}}} \quad (\text{式 2-7})$$

分子、分母に $\sqrt{nm}$ をかけると

$$Q = \frac{\sqrt{n \cdot m}}{n \cdot m + m - h} \quad (\text{式 2-8})$$

両辺を自乗すると、

$$Q^2 = \frac{n \cdot m}{(n \cdot m + m - h)^2} \quad (\text{式 2-9})$$

この式を整理してnに関する方程式を立てる。

$$(n \cdot m + m - h)^2 = \frac{n \cdot m}{Q^2}$$

$$m^2 \cdot n^2 + 2m(m - h)n + (m - h)^2 = \frac{m}{Q^2}n$$

$$m^2 \cdot n^2 + 2m \left( m - h - \frac{1}{2Q^2} \right) n + (m - h)^2 = 0$$

$$n^2 + 2 \left( 1 - \frac{h}{m} - \frac{1}{2mQ^2} \right) n + \left( 1 - \frac{h}{m} \right)^2 = 0 \quad (\text{式 2-10})$$

二次方程式の解の公式を使用し、

$$n = b \pm \sqrt{b^2 - \left( 1 - \frac{h}{m} \right)^2} \quad (\text{式 2-11})$$

ただし、

$$b = \frac{1}{2mQ^2} - \left( 1 - \frac{h}{m} \right) = \left( \frac{1}{2Q^2} + h \right) \frac{1}{m} - 1 \quad (\text{式 2-12})$$

と求まる。

nが実数となる条件は、

$$b^2 \geq \left( 1 - \frac{h}{m} \right)^2$$

であるからbを代入すると、

$$\left( \frac{1}{2mQ^2} - \left( 1 - \frac{h}{m} \right) \right)^2 \geq \left( 1 - \frac{h}{m} \right)^2$$

両辺に  $m^2$  を掛けて、

$$\left( \frac{1}{2Q^2} - (m - h) \right)^2 \geq (m - h)^2$$

$$\frac{1}{4Q^4} - 2 \frac{1}{2Q^2} (m - h) \geq 0$$

$Q^2$ をかけて、

$$\frac{1}{4Q^2} - (m - h) \geq 0$$

$$\frac{1}{4Q^2} + h \geq m \quad (\text{式 2-13})$$

これを満たせばnが実数となる。

さらに、Q が正の数値になるためには、式 2-8 の分母が正になる必要があるため、

$$n \cdot m + m - h \geq 0$$

$$n + 1 - \frac{h}{m} \geq 0$$

$$n \geq \frac{h}{m} - 1 \quad (\text{式 2-14})$$

の条件も必要となる。ゲイン  $H=1$  の場合は  $h=0$  であり、 $n \geq -1$  であれば良い。式 2-11 は±のどちらを選んでも正の数値になるため、 $n \geq -1$  の条件をどちらも満たす。ゲイン  $H>1$  の場合はマイナス側は条件によっては満たさないが、プラス側は以下に示すように必ず満たす。

$$b + \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2} \geq \frac{h}{m} - 1$$

$$\frac{1}{2mQ^2} - \left(1 - \frac{h}{m}\right) + \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2} - \left(\frac{h}{m} - 1\right) \geq 0$$

$$\frac{1}{2mQ^2} + \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2} \geq 0 \quad (\text{式 2-15})$$

ところで、ゲイン  $H>1$  の場合、サレン・キー型は素子の誤差による  $Q$  のバラツキが大きくなる。特に  $H$  が大きいと  $n<1$  では極端に誤差が増える。このため、 $H>1$  では  $n \geq 1$  の条件も追加することが望ましい。従って、

$$b + \sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2} \geq 1$$

$$\sqrt{b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2} \geq 1 - b$$

左辺は実数なら必ず正となる。右辺が正か負かは条件によるが、 $m$  の上限値を求めるため正の場合の等号条件のみ考えて、両辺を自乗してみる。

$$b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2 = (1 - b)^2$$

$$b^2 - \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2 = 1 - 2b + b^2$$

$$2b = 1 + \left(1 - \frac{h}{m}\right)^2$$

$$2\left(\frac{1}{2mQ^2} - \left(1 - \frac{h}{m}\right)\right) = 1 + 1 - 2\frac{h}{m} + \left(\frac{h}{m}\right)^2$$

$$\frac{1}{mQ^2} - 4 \left(1 - \frac{h}{m}\right) = \left(\frac{h}{m}\right)^2$$

$$\frac{1}{mQ^2} - 4 \left(1 - \frac{h}{m}\right) - \left(\frac{h}{m}\right)^2 = 0$$

$m^2$ をかけて

$$\frac{m}{Q^2} - 4m^2 + 4mh - h^2 = 0$$

$$\frac{m}{Q^2} - 4m^2 + 4mh - h^2 = 0$$

4で割って  $m$  の方程式として整理すると

$$m^2 - \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right)m + \frac{h^2}{4} = 0 \quad (\text{式 2-16})$$

これを解くと、

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right)^2 - \frac{h^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(h^2 + 2 \frac{h}{4Q^2} + \frac{1}{16Q^4}\right) - \frac{h^2}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right) \pm \sqrt{\frac{2h}{16Q^2} + \frac{1}{4 \cdot 16Q^4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(h + \frac{1}{4Q^2}\right) \pm \frac{1}{4Q} \sqrt{2h + \frac{1}{4Q^2}} \end{aligned} \quad (\text{式 2-17})$$

±の+側が上限となる。

ともかく  $n$  が求めれば折点角周波数  $\omega_o$  は、式 2-1 に  $n, m$  を代入して次のように書ける。

$$\begin{aligned} \omega_o &= \frac{1}{\sqrt{R1 n R1 C1 m C1}} \\ &= \frac{1}{R1 C1 \sqrt{n m}} \end{aligned} \quad (\text{式 2-18})$$

これより、 $R1$  は

$$R1 = \frac{1}{\omega_o C1 \sqrt{n m}} = \frac{1}{2 \pi f_o C1 \sqrt{n m}} \quad (\text{式 2-19})$$

と求まる。ここで  $f_o$  は折点周波数であり、バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい。ベッセル特性やチェビシェフ特性の場合は、設計表にカットオフ周波数から折点周波数への周波

数補正值が記載されているので、その値をカットオフ周波数に乗じて式 2-19 で計算すればよい。

R2 は n の定義(式 2-5)より次のように求まる。

$$R2 = n R1 \quad (式 2-20)$$

## 2.2 多重帰還型的设计式導出

多重帰還型の折点角周波数  $\omega_o$  と回路のクオリティ Q、ゲイン H は次のように示される。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1 R2 C1 C2}} \quad (式 2-21)$$

$$Q = \frac{\frac{\sqrt{C1}}{\sqrt{C2}}}{\sqrt{\frac{R2}{R1}} + \sqrt{\frac{R1}{R2}} + \sqrt{\frac{R1 R2}{R3^2}}} \quad (式 2-22)$$

$$H = \frac{R1}{R3} \quad (式 2-23)$$

式 2-21, 式 2-22 を見ると、C1, C2 を先に決めても R1, R2, R3 で調整できるのではないかという気がしてくる。そこで、

$$m = C1 / C2 \quad (式 2-24)$$

$$n = R1 / R2 \quad (式 2-25)$$

とにおいて(注:後述の計算を楽にするためにサレン・キー型とは比を逆にしている)、Q を求める式に代入してみる。

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{n} + \sqrt{\frac{R1 R2}{\left(\frac{R1}{H}\right)^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{n} + H\sqrt{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

分子、分母に  $\sqrt{n}$  をかけると

$$Q = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{1 + n + H}$$

両辺を自乗すると、

$$Q^2 = \frac{m \cdot n}{(1 + n + H)^2}$$

この式を整理して n に関する方程式を立てる。

$$(1 + n + H)^2 = \frac{m \cdot n}{Q^2}$$

$$n^2 + 2n(1 + H) + (1 + H)^2 = \frac{m \cdot n}{Q^2}$$

$$n^2 + 2 \left( 1 + H - \frac{m}{2Q^2} \right) n + (1 + H)^2 = 0 \quad (\text{式 2-26})$$

二次方程式の解の公式を使用し、

$$n = b \pm \sqrt{b^2 - (1 + H)^2} \quad (\text{式 2-27})$$

ただし、

$$b = \frac{m}{2Q^2} - (1 + H) \quad (\text{式 2-28})$$

と求まる。±はプラスを選択したほうが回路の入力抵抗を大きくできる。

nが実数となる条件は、

$$b^2 \geq (1 + H)^2$$

$$\left( \frac{m}{2Q^2} - (1 + H) \right)^2 \geq (1 + H)^2$$

$$\frac{m^2}{4Q^4} - 2 \frac{m}{2Q^2} (1 + H) + (1 + H)^2 \geq (1 + H)^2$$

$$\frac{m^2}{4Q^4} \geq \frac{m}{Q^2} (1 + H)$$

$$\frac{m}{4Q^4} \geq \frac{1}{Q^2} (1 + H)$$

$$m \geq 4Q^2 (1 + H) \quad (\text{式 2-29})$$

これを満たせばnが実数となる。

nが求まれば折点角周波数 $\omega_o$ は、式 2-21 に n,m を代入して次のように書ける。

$$\begin{aligned} \omega_o &= \frac{1}{\sqrt{nR_2 R_2 mC_2 mC_2}} \\ &= \frac{1}{R_2 C_2 \sqrt{n m}} \end{aligned} \quad (\text{式 2-30})$$

これより、R2は

$$R_2 = \frac{1}{\omega_o C_2 \sqrt{n m}} = \frac{1}{2 \pi f_o C_2 \sqrt{n m}} \quad (\text{式 2-31})$$

と求まる。ここで $f_o$ は折点周波数であり、バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい。ベッセル特性やチェビシェフ特性の場合は、設計表にカットオフ周波数から折点周波数への周波数補正值が記載されているので、その値をカットオフ周波数に乗じて式 2-31 で計算すればよい。

R1はnの定義(式 2-25)より次のように求まる。

$$R1 = n R2 \quad (\text{式 2-32})$$

R3 は H の式(式 2-23)より次のように求まる。

$$R3 = R1 / H \quad (\text{式 2-33})$$

### 3. $\omega_o$ とQの導出

伝達関数から  $\omega_o$ とQを導出する過程を以下に示す。回路の伝達関数の求め方については後述する。

#### 3.1 サレン・キー型の $\omega_o$ とQの導出

サレン・キー型の回路の伝達関数を次に示す。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\left(1 + \frac{R4}{R3}\right) \frac{1}{R1 R2 C1 C2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R1 C1} + \frac{1}{R2 C1} - \frac{R4}{R3} \cdot \frac{1}{R2 C2}\right) + \frac{1}{R1 R2 C1 C2}} \quad (\text{式 3-1})$$

一方、ローパス・フィルタの伝達関数は  $\omega_o$ とQ, H から次のように表せる。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{H \omega_o^2}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (\text{式 3-2})$$

この二つの伝達関数を見比べると、 $\omega_o$ とHは容易に対比できるので簡単に求まる。

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R1 R2 C1 C2} \quad (\text{式 3-3})$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1 R2 C1 C2}} \quad (\text{式 3-4})$$

$$H = 1 + \frac{R4}{R3} \quad (\text{式 3-5})$$

Qは、分母の第2項(sの項)を対比して  $\omega_o$ を代入すれば求まる。

$$\frac{\omega_o}{Q} = \left(\frac{1}{R1 C1} + \frac{1}{R2 C1} - \frac{R4}{R3} \cdot \frac{1}{R2 C2}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \left(\frac{1}{R1 C1} + \frac{1}{R2 C1} - \frac{R4}{R3} \cdot \frac{1}{R2 C2}\right) \sqrt{R1 R2 C1 C2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{R1 R2 C1 C2}}{R1 C1} + \frac{\sqrt{R1 R2 C1 C2}}{R2 C1} - \frac{R4}{R3} \cdot \frac{\sqrt{R1 R2 C1 C2}}{R2 C2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{R2 C2}}{\sqrt{R1 C1}} + \frac{\sqrt{R1 C2}}{\sqrt{R2 C1}} - \frac{R4}{R3} \cdot \frac{\sqrt{R1 C1}}{\sqrt{R2 C2}}\right) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{R2 \cdot C2}{R1 \cdot C1}} + \sqrt{\frac{R1 \cdot C2}{R2 \cdot C1}} - \frac{R4}{R3} \sqrt{\frac{R1 \cdot C1}{R2 \cdot C2}}}$$

(式 3-6)

### 3.2 多重帰還型の $\omega_o$ とQの導出

多重帰還型の回路の伝達関数を次に示す。反転増幅のため負号が付く。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-\left(\frac{R1}{R3}\right) \frac{1}{R1 R2 C1 C2}}{s^2 + s \frac{1}{C1} \left(\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3}\right) + \frac{1}{R1 R2 C1 C2}} \quad (式 3-7)$$

一方、反転型のローパス・フィルタの伝達関数は $\omega_o$ とQ, Hから次のように表せる。

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-H\omega_o^2}{s^2 + s \frac{\omega_o}{Q} + \omega_o^2} \quad (式 3-8)$$

この二つを見比べると、やはり $\omega_o$ とHは容易に対比できるので簡単に求まる。

$$\omega_o^2 = \frac{1}{R1 R2 C1 C2}$$
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1 R2 C1 C2}} \quad (式 3-9)$$

$$H = \frac{R1}{R3} \quad (式 3-10)$$

Qは、分母の第2項(sの項)を対比して $\omega_o$ を代入すれば求まる。

$$\frac{\omega_o}{Q} = \frac{1}{C1} \left( \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} \right)$$
$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{C1} \left( \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} \right) \sqrt{R1 R2 C1 C2}$$
$$= \frac{\sqrt{C1 C2}}{C1} \left( \frac{\sqrt{R1 R2}}{R1} + \frac{\sqrt{R1 R2}}{R2} + \frac{\sqrt{R1 R2}}{R3} \right)$$
$$= \frac{\sqrt{C2}}{\sqrt{C1}} \left( \frac{\sqrt{R2}}{\sqrt{R1}} + \frac{\sqrt{R1}}{\sqrt{R2}} + \frac{\sqrt{R1 R2}}{R3} \right)$$
$$Q = \frac{\sqrt{\frac{C1}{C2}}}{\sqrt{\frac{R2}{R1}} + \sqrt{\frac{R1}{R2}} + \sqrt{\frac{R1 R2}{R3^2}}} \quad (式 3-11)$$

#### 4. 回路の伝達関数の導出

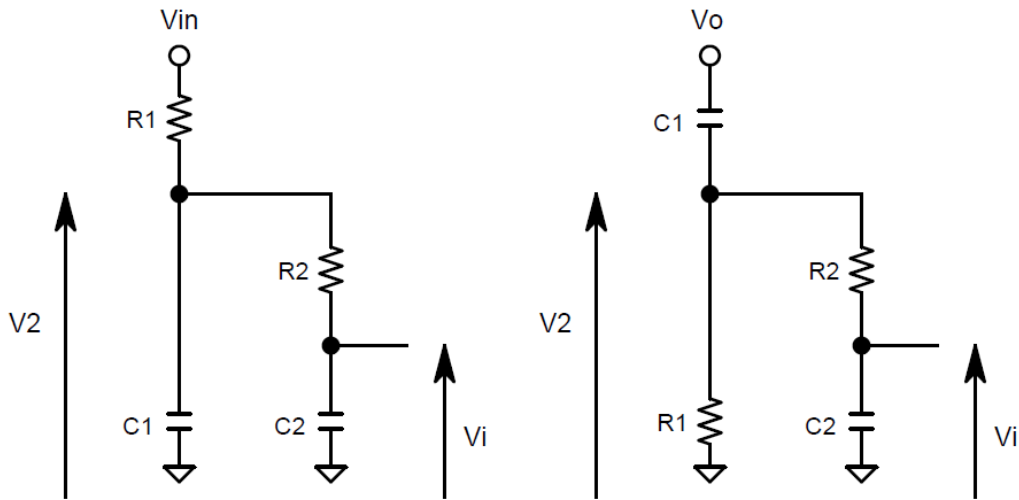
サレン・キー型、多重帰還型ともフィードバック回路なので、オペアンプ入力には入力信号成分と出力信号成分が加算されている。従って「重ね合わせの理」により二つの成分を加算して計算する。

##### 4.1 サレン・キー型回路の伝達関数導出

図3, 図4に示すように R1, C1 の接続点電圧を V2 とおいて、入力電圧 Vin と出力電圧 Vo から計算する。V2 が計算できれば、オペアンプ入力電圧 Vi は R2, C2 による分圧として容易に計算できる。

図3 サレン・キー型回路の入力側

図4 サレン・キー型回路の出力側



C1, C2 のインピーダンスを ZC1, ZC2 とおき、図3の下側の C1, R2, C2 からなる回路のインピーダンスを Z2, 図4の下側の R1, R2, C2 からなる回路のインピーダンスを Z3 とおくと、

$$V2 = \frac{Z2}{R1 + Z2} Vin + \frac{Z3}{ZC1 + Z3} Vo \quad (\text{式 4-1})$$

Z2, Z3 をそれぞれ計算すると、

$$Z2 = \frac{1}{\frac{1}{ZC1} + \frac{1}{R2 + ZC2}} = \frac{1}{sC1 + \frac{1}{R2 + \frac{1}{sC2}}} = \frac{1}{sC1 + \frac{sC2}{sC2R2 + 1}} = \frac{sC2R2 + 1}{sC1(sC2R2 + 1) + sC2} \quad (\text{式 4-2})$$

$$Z3 = \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2 + ZC2}} = \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2 + \frac{1}{sC2}}} = \frac{1}{\frac{1}{R1} + \frac{sC2}{sC2R2 + 1}} = \frac{R1(sC2R2 + 1)}{sC2R2 + 1 + sC2R1} \quad (\text{式 4-3})$$

これを式 4-1 に代入すると

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{\frac{sC_2R_2 + 1}{sC_1(sC_2R_2 + 1) + sC_2}}{R_1 + \frac{sC_2R_2 + 1}{sC_1(sC_2R_2 + 1) + sC_2}} V_{in} + \frac{\frac{R_1(sC_2R_2 + 1)}{sC_2R_2 + 1 + sC_2R_1}}{\frac{1}{sC_1} + \frac{R_1(sC_2R_2 + 1)}{sC_2R_2 + 1 + sC_2R_1}} V_o \\
&= \frac{sC_2R_2 + 1}{R_1(sC_1(sC_2R_2 + 1) + sC_2) + sC_2R_2 + 1} V_{in} + \frac{sC_1R_1(sC_2R_2 + 1)}{sC_2R_2 + 1 + sC_2R_1 + sC_1R_1(sC_2R_2 + 1)} V_o \\
&= \frac{sC_2R_2 + 1}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} V_{in} \\
&\quad + \frac{sC_1R_1(sC_2R_2 + 1)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} V_o \\
&= \frac{(sC_2R_2 + 1)(V_{in} + sC_1R_1 V_o)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \tag{式 4-4}
\end{aligned}$$

オペアンプ入力電圧  $V_i$  は、

$$\begin{aligned}
V_i &= \frac{ZC_2}{R_2 + ZC_2} V_2 = \frac{1}{\frac{R_2}{ZC_2} + 1} \cdot \frac{(sC_2R_2 + 1)(V_{in} + sC_1R_1 V_o)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \\
&= \frac{1}{sR_2C_2 + 1} \cdot \frac{(sC_2R_2 + 1)(V_{in} + sC_1R_1 V_o)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \\
&= \frac{V_{in} + sC_1R_1 V_o}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \tag{式 4-5}
\end{aligned}$$

ここでオペアンプは正相増幅器として働くので、

$$\begin{aligned}
V_o &= \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) V_i \\
V_i &= \frac{1}{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)} V_o \tag{式 4-6}
\end{aligned}$$

これを式 4-5 に代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)} V_o &= \frac{V_{in} + sC_1R_1 V_o}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \\
\frac{1}{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)} V_o - \frac{sC_1R_1 V_o}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} &= \frac{V_{in}}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1} \\
\frac{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1 - \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) sC_1R_1}{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)} V_o &= V_{in} \\
\frac{V_o}{V_{in}} &= \frac{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right)}{s^2R_1R_2C_1C_2 + sR_1C_1 + sR_1C_2 + sR_2C_2 + 1 - \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) sC_1R_1} \tag{式 4-7}
\end{aligned}$$

分子、分母を  $R_1R_2C_1C_2$  で割ると、回路の伝達関数が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{in}} &= \frac{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{R_1C_1}{R_1R_2C_1C_2} + \frac{R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} + \frac{R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2} - \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{C_1R_1}{R_1R_2C_1C_2}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s\left(\frac{1}{R_2C_1} + \frac{1}{R_1C_1} - \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{1}{R_2C_2}\right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \end{aligned} \quad (\text{式 4-8})$$

#### 4.2 多重帰還型回路の伝達関数導出

オペアンプ入力電圧  $V_i$  を入力電圧  $V_{in}$  と出力電圧  $V_o$  から別々に計算して加算する。入力電圧  $V_{in}$  側は、図 5 に示すように  $R_3$  と他回路の接続点電圧  $V_2$  とおいて、 $V_2$  を  $R_2, C_2$  で分圧計算して  $V_i$  を求める。出力電圧  $V_o$  側は、図 6 に示す  $V_3$  を計算し、 $V_3$  から  $R_2, C_2$  の分圧により  $V_i$  を計算したうえで  $V_i$  を計算する。

図 5 多重帰還型回路の入力側

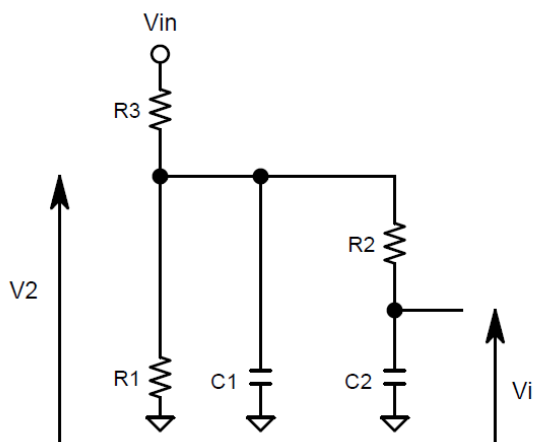
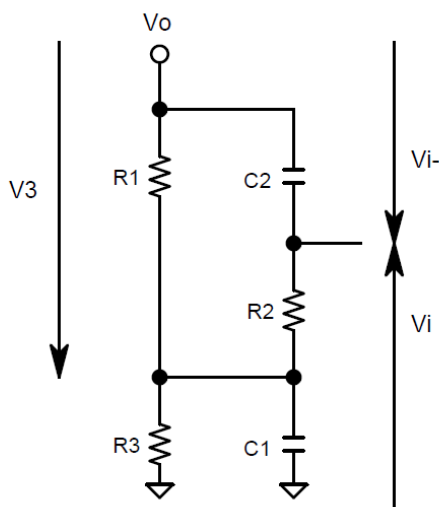


図 6 多重帰還型回路の出力側



まず  $V_{in}$  に対する  $V_2$  を求める。 $R_1, C_1, R_2, C_2$  によるインピーダンスを  $Z_2$  とすると、

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{Z_2}{R_3 + Z_2} V_{in} = \frac{1}{\frac{R_3}{Z_2} + 1} V_{in} = \frac{1}{R_3 \left( \frac{1}{R_1} + sC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \right) + 1} V_{in} \\ &= \frac{1}{\frac{R_3}{R_1} + sR_3C_1 + \frac{sR_3C_2}{sR_2C_2 + 1} + 1} V_{in} \end{aligned} \quad (\text{式 4-9})$$

$V_{in}$  に対する  $V_i$  を  $V_{ii}$  とすると、

$$\begin{aligned}
V_{ii} &= \frac{Z_{C2}}{R_2 + Z_{C2}} V_2 = \frac{1}{\frac{R_2}{Z_{C2}} + 1} V_2 = \frac{1}{sR_2C_2 + 1} \cdot \frac{1}{\frac{R_3}{R_1 + sR_3C_1} + \frac{sR_3C_2}{sR_2C_2 + 1} + 1} V_{in} \\
&= \frac{1}{\frac{sR_2R_3C_2 + R_3}{R_1} + (sR_2C_2 + 1)sR_3C_1 + sR_3C_2 + sR_2C_2 + 1} V_{in} \\
&= \frac{1}{\frac{sR_2R_3C_2 + R_3}{R_1} + s^2R_2R_3C_1C_2 + sR_3C_1 + sR_3C_2 + sR_2C_2 + 1} V_{in} \\
&= \frac{R_1}{sR_2R_3C_2 + R_3 + s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1} V_{in} \\
&= \frac{R_1}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_{in} \quad (\text{式 4-10})
\end{aligned}$$

次に  $V_o$  に対する  $V_3$  を求める。  $R_1, C_2, R_2$  の回路インピーダンスを  $Z_3$  とし、  $R_3, C_1$  の回路インピーダンスを  $Z_4$  とすると、

$$\begin{aligned}
Z_3 &= \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{sC_2}}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{sC_2}{sR_2C_2 + 1}} = \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)}{sR_2C_2 + 1 + sR_1C_2} \\
Z_4 &= \frac{1}{\frac{1}{R_3} + sC_1} = \frac{R_3}{1 + sR_3C_1} \\
V_3 &= \frac{Z_3}{Z_4 + Z_3} V_o = \frac{1}{\frac{Z_4}{Z_3} + 1} V_o = \frac{1}{\frac{R_3}{1 + sR_3C_1} \cdot \frac{sR_2C_2 + 1 + sR_1C_2}{R_1(sR_2C_2 + 1)} + 1} V_o \\
&= \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)}{\frac{R_3(sR_2C_2 + 1 + sR_1C_2)}{1 + sR_3C_1} + R_1(sR_2C_2 + 1)} V_o \\
&= \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)}{R_3(sR_2C_2 + 1 + sR_1C_2) + R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)} V_o \\
&= \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)}{sR_2R_3C_2 + R_3 + sR_1R_3C_2 + (sR_1R_2C_2 + R_1)(1 + sR_3C_1)} V_o \\
&= \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)}{sR_2R_3C_2 + R_3 + sR_1R_3C_2 + s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_2C_2 + R_1} V_o \\
&= \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_o \quad (\text{式 4-11})
\end{aligned}$$

$V_o$  に対する  $V_i$  を  $V_{io}$  とすると(図 6 の  $V_i$  を  $V_{im}$  とすると)

$$\begin{aligned}
V_{io} &= V_o - V_{im} = V_o - \frac{Z_{C2}}{R_2 + Z_{C2}} V_3 = V_o - \frac{1}{\frac{R_2}{Z_{C2}} + 1} V_3 \\
&= V_o \\
&= \frac{1}{sR_2C_2 + 1} \cdot \frac{R_1(sR_2C_2 + 1)(1 + sR_3C_1)}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_o
\end{aligned}$$

$$= V_o - \frac{R_1(1 + sR_3C_1)}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_o \quad (\text{式 4-12})$$

$V_i$  は  $V_{ii}+V_{io}$  であるから、

$$V_i = V_{ii} + V_{io}$$

$$= \frac{R_1}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_{in} + V_o - \frac{R_1(1 + sR_3C_1)}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3} V_o \quad (\text{式 4-13})$$

$V_i$  はオペアンプ+側とイマジナリーショートとなり結局 0 であるから、

$$0 = R_1V_{in} + (s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3)V_o - R_1(1 + sR_3C_1)V_o$$

$$-R_1V_{in} = (s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_1 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_1 + R_3 - R_1 - sR_1R_3C_1)V_o$$

$$\frac{V_o}{V_{in}} = \frac{-R_1}{s^2R_1R_2R_3C_1C_2 + sR_2R_3C_2 + sR_1R_3C_2 + sR_1R_2C_2 + R_3} \quad (\text{式 4-14})$$

分子、分母を  $R_3$  で割って、さらに  $R_1R_2C_1C_2$  で割ると、回路の伝達関数が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{V_o}{V_{in}} &= \frac{-\frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s \frac{R_2C_2}{R_1R_2C_1C_2} + s \frac{R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2} + s \frac{R_1R_2C_2}{R_1R_2R_3C_1C_2} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \\ &= \frac{-\frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s \frac{1}{R_1C_1} + s \frac{1}{R_2C_1} + s \frac{1}{R_3C_1} + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \\ &= \frac{-\frac{R_1}{R_3} \cdot \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}{s^2 + s \frac{1}{C_1} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}} \quad (\text{式 4-15}) \end{aligned}$$

#### ■■参考文献■■

(1)工藤道夫,三浦興己 : RC アクティブフィルタの解析と設計, 1971 年, 信州大学工学部紀要 卷 30, p. 75-94

改訂履歴

| 版   | 日付        | 記事   |
|-----|-----------|------|
| 1.0 | 2024/11/8 | 新規作成 |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |
|     |           |      |