コンデンサ優先のハイパス・フィルタ設計法

2024 年 11 月 14 日(初版)
マイコン技研　Maikon-Giken
澤田　明　Akira Sawada

1. はじめに

拙著『「コンデンサ値を先に決める」精度 1%の LPF 設計法』がトランジスタ技術 2024 年 12 月号(CQ　出版社)に掲載された。この記事の最後にハイパス・フィルタについてはコンデンサ優先の設計法がすでに知られていると述べたが、それらの設計法は二つコンデンサの比率を自由に選ぶことはできない。一般的にはそれで問題ないと思われるが、例えばオペアンプのバイアス電流の影響を下げるために R2 を小さくしたい場合など、比率を選択できた方が有効な特殊事例も考えられなくはない。本稿では実用性はともかく、任意のコンデンサ比で設計する方法について説明し、参考として導出過程も示す。

対象となるローパス・フィルタ回路は、サレン・キー型(図 1)および多重帰還型(図 2)である。

図 1. サレン・キー型ハイパス・フィルタ回路

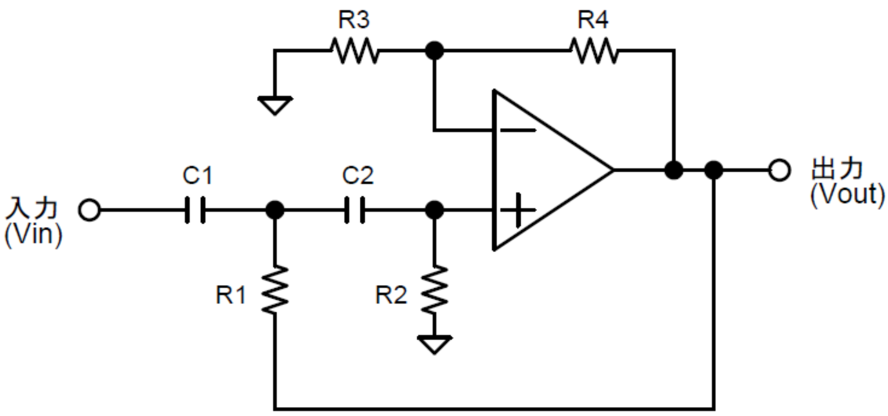
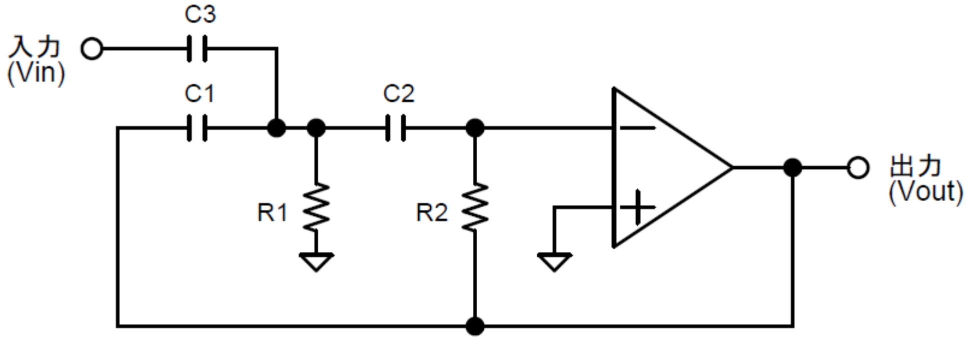


図2. 多重帰還型ハイパス・フィルタ回路



2. 設計手順

以下の手順では、設計条件として折点周波数 fo(カットオフ周波数 fc に周波数補正値を掛けた値)、回路のクオリティ・ファクタ Q、ゲイン H(倍率)が決まっているものとする。

2.1 サレン・キー型ハイパス・フィルタの設計手順

(1) R3, R4 を選択して比率 h を求める。

$$h = R4 \,/\, R3 \qquad \text{(式 2.1-1)}$$

ゲイン H = 1 の場合： R3 無し(R3 = ∞)とし、h = 0 とする。

ゲイン H > 1 の場合： (1 + R4 / R3) = H となるように E 系列から R3, R4 を選択する。

(2) C1, C2 を調達容易な値から選択し、比率 m を求める。

$$m = C2 \,/\, C1 \qquad \text{(式 2.1-2)}$$

LPF 設計法のような制約条件は無い。従来の設計法は、C2=C1 すなわち m=1 に限定した場合と同等になる。

(3) 抵抗比 n を求める。

① h=0 の場合

$$n = \left(m + \frac{1}{m} + 2\right) Q^2 \qquad \text{(式 2.1-3)}$$

② h≠0 の場合

$$n = b - \sqrt{b^2 - \frac{(m+1)^2}{h^2 \cdot m^2}} \qquad \text{(式 2.1-4)}$$

ただし、

$$b = \left((m+1)h + \frac{1}{2Q^2}\right)\frac{1}{m\,h^2} \qquad \text{(式 2.1-5)}$$

(4) R1, R2 を求める。

$$R1 = \frac{1}{2\,\pi\, f_o\, C1 \sqrt{n\,m}} \qquad \text{(式 2.1-6)}$$

$$R2 = n\,R1 \qquad \text{(式 2.1-7)}$$

ただし fo = fc / foc (式 2.1-8)

fo：折点周波数 (バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい)

fc：カットオフ周波数(ゲインが $1/\sqrt{2}$ となる周波数)

foc：LPF 用周波数補正値 (設計表に記載の値。別掲 LPF 設計シート参照)

注：HPF では LPF 周波数補正値の逆数を掛ける必要がある。

(5) 検算

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{R1\ R2\ C1\ C2}}$$ (式 2.1-9)

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{R1}{R2}\cdot\frac{C1}{C2}} + \sqrt{\frac{R1}{R2}\cdot\frac{C2}{C1}} - \frac{R4}{R3}\sqrt{\frac{R2}{R1}\cdot\frac{C2}{C1}}}$$ (式 2.1-10)

$$H = 1 + \frac{R4}{R3}$$ (式 2.1-11)

2.2 多重帰還型ハイパス・フィルタの設計手順

(1) C1, C2 を調達容易な値から選択し、比率 m を求める。

m = C2 / C1 (式 2.2-1)

LPF 設計法のような制約条件は無い。

(2) C3 を選択し、比率 h を求める。

h = C3 / C1 (式 2.2-2)

h は回路ゲインとなるので、H に等しいことが望ましいが、H が E 系列の値(1, 1.5, 2.2. ・・・)でない限り等しくすることは困難である。h と H の差は別の段(3 次以上の場合)あるいは単独の減衰器やアンプで調整するしかない。調整ゲイン k は次のようになる。

k = H / h (式 2.2-3)

(3) 抵抗比 n を求める。

$$n = \frac{Q^2(1+m+h)^2}{m}$$ (式 2.2-4)

(4) R1, R2 を求める。

$$R1 = \frac{1}{2\,\pi\,f_o\,C1\,\sqrt{n\,m}}$$ (式 2.2-5)

R2 = n R1 (式 2.2-6)

ただし fo = fc / foc (式 2.2-7)

fo：折点周波数（バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい）

fc：カットオフ周波数（ゲインが 1/√2 となる周波数）

foc：LPF 用周波数補正値（設計表に記載の値。別掲 LPF 設計シート参照）

注：HPF では LPF 周波数補正値の逆数を掛ける必要がある。

(5) 検算

$$f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{R1\ R2\ C1\ C2}}$$ （式 2.2-8）

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R2}{R1}}}{\sqrt{\frac{C1}{C2}} + \sqrt{\frac{C2}{C1}} + \sqrt{\frac{C3^2}{C1C2}}}$$ （式 2.2-9）

$$H = k\frac{C3}{C1}$$ （式 2.2-10）

ここで k は設計手順(2)で求めた調整ゲインであり、もし調整を行わない場合は k がゲイン誤差倍率となる。

3. 設計式の導出

3.1 サレン・キー型ハイパス・フィルタの設計式導出

サレン・キー型 HPF の折点角周波数 ω_Oと回路のクオリティQ、ゲイン H は次のように示される。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1\ R2\ C1\ C2}}$$ （式 3.1-1）

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{R1}{R2}\cdot\frac{C1}{C2}} + \sqrt{\frac{R1}{R2}\cdot\frac{C2}{C1}} - \frac{R4}{R3}\sqrt{\frac{R2}{R1}\cdot\frac{C2}{C1}}}$$ （式 3.1-2）

$$H = 1 + \frac{R4}{R3}$$ （式 3.1-3）

ここで、n=R2/R1, m=C2/C1, h=R4/R3 とすると

$$Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}} + \sqrt{\frac{1}{n}\cdot m} - h\sqrt{n\cdot m}}$$

分子、分母に√(nm)をかけると

$$Q = \frac{\sqrt{n\cdot m}}{1 + m - hmn}$$ （式 3.1-4）

両辺を自乗すると、

$$Q^2 = \frac{n\cdot m}{(1 + m - hmn)^2}$$

この式を整理してnに関する方程式を立てる。

$$((m+1) - hmn)^2 = \frac{n\cdot m}{Q^2}$$

$$h^2 \cdot m^2 \cdot n^2 - 2(m+1)hmn + (m+1)^2 = \frac{m}{Q^2} n$$

$$h^2 \cdot m^2 \cdot n^2 - 2m\left((m+1)\,h + \frac{1}{2Q^2}\right)n + (m+1)^2 = 0$$

ここで h=0 の場合は、

$$2m\left(\frac{1}{2Q^2}\right)n = (m+1)^2$$

$$n = \frac{Q^2(m^2 + 2m + 1)}{m} = Q^2\left(m + 2 + \frac{1}{m}\right) \qquad \text{(式 3.1–5)}$$

となる。

h≠0 の場合は、二次方程式の解の公式を使用し、

$$n = b \pm \sqrt{b^2 - \frac{(m+1)^2}{h^2 \cdot m^2}} \qquad \text{(式 3.1–6)}$$

ただし、

$$b = \left((m+1)h + \frac{1}{2Q^2}\right)\frac{1}{m\,h^2} \qquad \text{(式 3.1–7)}$$

と求まる。

nが実数となる条件は、式 3.1−6 より

$$b^2 \geqq \frac{(m+1)^2}{h^2 \cdot m^2}$$

であるから、これを展開して

$$\left((m+1)h + \frac{1}{2Q^2}\right)^2 \geqq (m+1)^2\,h^2$$

$$2(m+1)h \cdot \frac{1}{2Q^2} + \frac{1}{4Q^4} \geqq 0$$

$$(m+1)h + \frac{1}{4Q^2} \geqq 0 \qquad \text{(式 3.1–8)}$$

h,m,Q は正の数値であるからこの式は常に成り立つ。

また n が正の数値になるためには、式 3.1−4 の分母が正でなければならない。h=0 の場合は必ず成り立つ。h≠0 の場合は、

$m + 1 \geqq hmn$

$$n \leqq (m+1)\frac{1}{hm}$$

$$b \pm \sqrt{b^2 - \frac{(m+1)^2}{h^2 \cdot m^2}} \leqq (m+1)\frac{1}{hm}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2h(m+1)Q^2}\right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2h(m+1)Q^2}\right)^2 - 1} \leqq 1$$

+の場合は満たさないので、

$$\left(1 + \frac{1}{2h(m+1)Q^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2h(m+1)Q^2}\right)^2 + \frac{2}{2h(m+1)Q^2}} \leqq 1$$

$$\frac{1}{2h(m+1)Q^2} \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{2h(m+1)Q^2}\right)^2 + \frac{2}{2h(m+1)Q^2}}$$

これは必ず満たす。従って式 3.1−6 は必ず−を選択する必要がある。

n が求まれば、折点角周波数 ω_Oは、式 3.1−1 に n,m を代入して次のように書ける。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1\ nR1\ C1\ mC1}}$$

$$= \frac{1}{R1\ C1\sqrt{n\ m}} \qquad \text{(式 3.1−9)}$$

これより、R1 は

$$R1 = \frac{1}{\omega_o\ C1\sqrt{n\ m}} = \frac{1}{2\pi f_o\ C1\sqrt{n\ m}} \qquad \text{(式 3.1−10)}$$

ここで fo は折点周波数であり、バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい。

R2 は n の定義より次のように求まる。

R2 = n R1 (式 3.1−11)

3.2 多重帰還型の設計式導出

多重帰還型の折点角周波数 ω_Oと回路のクオリティQ、ゲイン H は次のように示される。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1\ R2\ C1\ C2}} \qquad \text{(式 3.2−1)}$$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R2}{R1}}}{\sqrt{\frac{C1}{C2}} + \sqrt{\frac{C2}{C1}} + \sqrt{\frac{C3^2}{C1C2}}} \qquad \text{(式 3.2−2)}$$

$$H = \frac{C3}{C1} \qquad \text{(式 3.2−3)}$$

ここで、

m = C2 / C1 (式 3.2-4)

n = R2 / R1 (式 3.2-5)

とおいて、Q を求める式に代入してみる。

$$Q = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{m}} + \sqrt{m} + \sqrt{\frac{H^2}{m}}}$$

分子、分母に√(m)をかけると

$$Q = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{1\ +\ m + H}$$

両辺を自乗すると、

$$Q^2 = \frac{m \cdot n}{(1 + m + H)^2}$$

この式を整理してnに関する方程式を立てる。

$$n = \frac{Q^2(1 + m + H)^2}{m}$$

n が求まれば折点角周波数 ω_oは、式 3.2-1 に n,m を代入して次のように書ける。

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{R1\ nR1\ C1\ mC1}}$$

$$= \frac{1}{R1\ C1\ \sqrt{n\ m}} \qquad \text{(式 3.2-6)}$$

これより、R1 は

$$R1 = \frac{1}{\omega_o\ C1\ \sqrt{n\ m}} = \frac{1}{2\pi\ f_o\ C1\ \sqrt{n\ m}}$$

ここで fo は折点周波数であり、バターワース特性においてはカットオフ周波数に等しい。

R2 は n の定義(式 3.2-5)より次のように求まる。

R2 = n R1 (式 3.2-7)

C3 は式 3.2-3 より次のように求まる。

C3 =H C1 (式 3.2-8)

C3 を実在するコンデンサの値で選びたい場合は、H を E 系列に合わせ、別の段あるいは単独の減衰器・アンプで倍率調整するしかない。奇数次の場合は一次フィルタの部分で調整すればよい。偶数次の場合はトータルゲインをやや大きめにして分圧器で減衰したほうが、C3 を複数のコンデンサで構成してゲインを合わせるよりも安く済む。

4. ω o とQの導出

伝達関数からω o とQを導出する過程を以下に示す。回路の伝達関数の求め方については後述する。

4.1 サレン・キー型のω o とQの導出

サレン・キー型ハイパス・フィルタ回路の伝達関数を次に示す。

$$\frac{\mathrm{Vout}}{\mathrm{Vin}} = \frac{\left(1+\frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\right)s^2}{s^2 + s\left(\frac{1}{\mathrm{R2\,C1}} + \frac{1}{\mathrm{R2\,C2}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{R1\,C1}}\right) + \frac{1}{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}} \qquad \text{(式 4.1−1)}$$

一方、ハイパス・フィルタの伝達関数はω o とQ, H から次のように表せる。

$$\frac{\mathrm{Vout}}{\mathrm{Vin}} = \frac{\mathrm{H}s^2}{s^2 + s\frac{\omega_o}{\mathrm{Q}} + {\omega_o}^2} \qquad \text{(式 4.1−2)}$$

この二つの伝達関数を見比べると、ω o とH は容易に対比できるので簡単に求まる。

$${\omega_o}^2 = \frac{1}{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}} \qquad \text{(式 4.1−3)}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}} \qquad \text{(式 4.1−4)}$$

$$\mathrm{H} = 1 + \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}} \qquad \text{(式 4.1−5)}$$

Q は、分母の第 2 項(s の項)を対比してω o を代入すれば求まる。

$$\frac{\omega_o}{\mathrm{Q}} = \left(\frac{1}{\mathrm{R2\,C1}} + \frac{1}{\mathrm{R2\,C2}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{R1\,C1}}\right)$$

$$\frac{1}{\mathrm{Q}} = \left(\frac{1}{\mathrm{R2\,C1}} + \frac{1}{\mathrm{R2\,C2}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\cdot\frac{1}{\mathrm{R1\,C1}}\right)\sqrt{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}}{\mathrm{R2\,C1}} + \frac{\sqrt{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}}{\mathrm{R2\,C2}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{R1\,R2\,C1\,C2}}}{\mathrm{R1\,C1}}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{\mathrm{R1\,C2}}}{\sqrt{\mathrm{R2\,C1}}} + \frac{\sqrt{\mathrm{R1\,C1}}}{\sqrt{\mathrm{R2\,C2}}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\cdot\frac{\sqrt{\mathrm{R2\,C2}}}{\sqrt{\mathrm{R1\,C1}}}\right)$$

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\mathrm{R1}}{\mathrm{R2}}\cdot\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{C1}}} + \sqrt{\frac{\mathrm{R1}}{\mathrm{R2}}\cdot\frac{\mathrm{C1}}{\mathrm{C2}}} - \frac{\mathrm{R4}}{\mathrm{R3}}\sqrt{\frac{\mathrm{R2}}{\mathrm{R1}}\cdot\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{C1}}}} \qquad \text{(式 4.1−6)}$$

4.2 多重帰還型のω₀とQの導出

多重帰還型の回路の伝達関数を次に示す。反転増幅のため負号が付く。

$$\frac{\mathrm{Vout}}{\mathrm{Vin}} = \frac{-\dfrac{\mathrm{C3}}{\mathrm{C1}}\mathrm{s}^2}{\mathrm{s}^2 \ + \ \mathrm{s}\ \dfrac{\mathrm{C1 + C2 + C3}}{\mathrm{R2\ C1\ C2}} \ + \ \dfrac{1}{\mathrm{R1\ R2\ C1\ C2}}} \qquad (式\ 4.2\text{-}1)$$

一方、反転型のローパス・フィルタの伝達関数はω_OとQ, H から次のように表せる。

$$\frac{\mathrm{Vout}}{\mathrm{Vin}} = \frac{-\mathrm{Hs}^2}{\mathrm{s}^2 + \mathrm{s}\dfrac{\omega_o}{\mathrm{Q}} + {\omega_o}^2} \qquad (式\ 4.2\text{-}2)$$

この二つを見比べると、やはりω_Oと H は容易に対比できるので簡単に求まる。

$${\omega_o}^2 = \frac{1}{\mathrm{R1\ R2\ C1\ C2}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{R1\ R2\ C1\ C2}}} \qquad (式\ 4.2\text{-}3)$$

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{C3}}{\mathrm{C1}} \qquad (式\ 4.2\text{-}4)$$

Q は、分母の第 2 項(s の項)を対比してω_Oを代入すれば求まる。

$$\frac{\omega_o}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{C1 + C2 + C3}}{\mathrm{R2\ C1\ C2}}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{C1 + C2 + C3}}{\mathrm{R2\ C1\ C2}}\sqrt{\mathrm{R1\ R2\ C1\ C2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{R1}}}{\sqrt{\mathrm{R2}}}\left(\frac{\mathrm{C1}}{\sqrt{\mathrm{C1\ C2}}} + \frac{\mathrm{C2}}{\sqrt{\mathrm{C1\ C2}}} + \frac{\mathrm{C3}}{\sqrt{\mathrm{C1\ C2}}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\mathrm{R1}}}{\sqrt{\mathrm{R2}}}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{C1}}}{\sqrt{\mathrm{C2}}} + \frac{\sqrt{\mathrm{C2}}}{\sqrt{\mathrm{C1}}} + \frac{\sqrt{\mathrm{C3}^2}}{\sqrt{\mathrm{C1\ C2}}}\right)$$

$$\mathrm{Q} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mathrm{R2}}{\mathrm{R1}}}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{C1}}{\mathrm{C2}}} + \sqrt{\dfrac{\mathrm{C2}}{\mathrm{C1}}} + \sqrt{\dfrac{\mathrm{C3}^2}{\mathrm{C1\ C2}}}} \qquad (式\ 4.2\text{-}5)$$

5. 回路の伝達関数の導出

サレン・キー型、多重帰還型ともフィードバック回路なので、オペアンプ入力には入力信号成分と出力信号成分が加算されている。従って「重ね合わせの理」により二つの成分を加算して計算する。

5.1 サレン・キー型回路の伝達関数導出

図 3, 図 4 に示すように C1,R1 の接続点電圧を V2 とおいて、入力電圧 Vin と出力電圧 Vo から計算する。V2 が計算できれば、オペアンプ入力電圧 Vi は C2,R2 による分圧として容易に計算できる。

図3 サレン・キー型回路の入力側

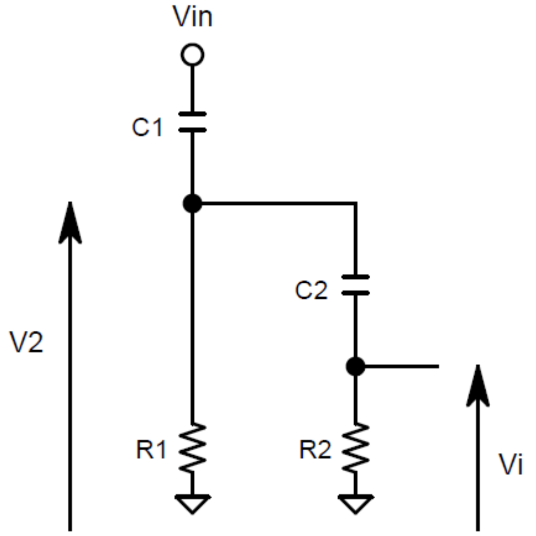
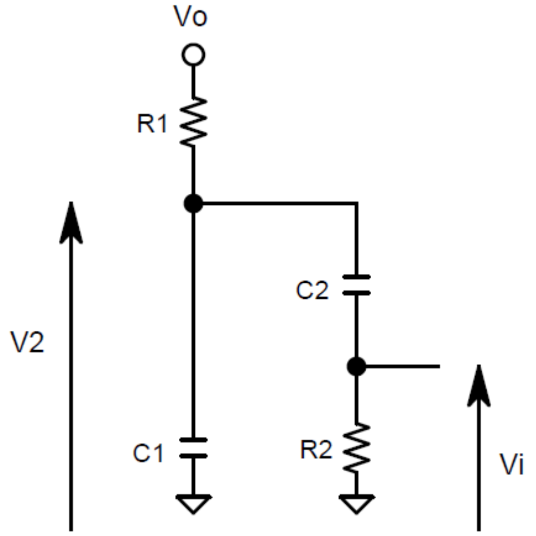


図4 サレン・キー型回路の出力側



C1,C2 のインピーダンスを ZC1,ZC2 とおき、図 3 の下側の R1, C2, R2 からなる回路のインピーダンスを Z2, 図 4 の下側の C1, C2, R2 からなる回路のインピーダンスを Z3 とおくと、

$$\mathrm{V2} = \frac{\mathrm{Z2}}{\mathrm{ZC1} + \mathrm{Z2}}\mathrm{Vin} + \frac{\mathrm{Z3}}{\mathrm{R1} + \mathrm{Z3}}\mathrm{Vo} \qquad \text{(式 5.1–1)}$$

Z3, Z2 をそれぞれ計算すると、

$$\mathrm{Z3} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{ZC1}} + \frac{1}{\mathrm{R2} + \mathrm{ZC2}}} = \frac{1}{\mathrm{sC1} + \frac{1}{\mathrm{R2} + \frac{1}{\mathrm{sC2}}}} = \frac{1}{\mathrm{sC1} + \frac{\mathrm{sC2}}{\mathrm{sC2R2} + 1}} = \frac{\mathrm{sC2R2} + 1}{\mathrm{sC1(sC2R2} + 1) + \mathrm{sC2}} \qquad \text{(式 5.1–2)}$$

$$\mathrm{Z2} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R1}} + \frac{1}{\mathrm{R2} + \mathrm{ZC2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R1}} + \frac{1}{\mathrm{R2} + \frac{1}{\mathrm{sC2}}}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{R1}} + \frac{\mathrm{sC2}}{\mathrm{sC2R2} + 1}} = \frac{\mathrm{R1(sC2R2} + 1)}{\mathrm{sC2R2} + 1 + \mathrm{sC2R1}} \qquad \text{(式 5.1–3)}$$

これを式 4–1 に代入すると

$$V2=\frac{\frac{R1(sC2R2+1)}{sC2R2+1+sC2R1}}{\frac{1}{sC1}+\frac{R1(sC2R2+1)}{sC2R2+1+sC2R1}}Vin+\frac{\frac{sC2R2+1}{sC1(sC2R2+1)+sC2}}{R1+\frac{sC2R2+1}{sC1(sC2R2+1)+sC2}}Vo$$

$$=\frac{sC2R2+1}{R1(sC1(sC2R2+1)+sC2)+sC2R2+1}Vo+\frac{sC1R1(sC2R2+1)}{sC2R2+1+sC2R1+sC1R1(sC2R2+1)}Vin$$

$$=\frac{sC2R2+1}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}Vo$$

$$+\frac{sC1R1(sC2R2+1)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}Vin$$

$$=\frac{(sC2R2+1)(Vo+sC1R1\ Vin)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1} \qquad \text{(式 5.1-4)}$$

オペアンプ入力電圧 Vi は、

$$Vi=\frac{R2}{R2+ZC2}V2=\frac{1}{1+\frac{ZC2}{R2}}\cdot\frac{(sC2R2+1)(Vo+sC1R1\ Vin)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}$$

$$=\frac{sR2C2}{sR2C2+1}\cdot\frac{(sC2R2+1)(Vo+sC1R1\ Vin)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}$$

$$=\frac{sR2C2(Vo+sC1R1\ Vin)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1} \qquad \text{(式 5.1-5)}$$

ここでオペアンプは正相増幅器として働くので、

$$Vo=\left(1+\frac{R4}{R3}\right)Vi$$

$$Vi=\frac{1}{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)}Vo \qquad \text{(式 5.1-6)}$$

これを式 4-5 に代入して、

$$\frac{1}{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)}Vo=\frac{sR2C2(Vo+sC1R1\ Vin)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)}Vo-\frac{sR2C2\ Vo}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}$$

$$=\frac{s^2R1R2C1C2Vin}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1}$$

$$\frac{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1-\left(1+\frac{R4}{R3}\right)sR2C2}{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)}Vo=s^2R1R2C1C2\ Vin$$

$$\frac{Vo}{Vin}=\frac{s^2R1R2C1C2\left(1+\frac{R4}{R3}\right)}{s^2R1R2C1C2+sR1C1+sR1C2+sR2C2+1-\left(1+\frac{R4}{R3}\right)sR2C2} \qquad \text{(式 5.1-7)}$$

分子、分母を R1R2C1C2 で割ると、回路の伝達関数が得られる。

$$\frac{Vo}{Vin}=\frac{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)s^2}{s^2+s\left(\frac{R1C1}{R1R2C1C2}+\frac{R1C2}{R1R2C1C2}+\frac{R2C2}{R1R2C1C2}-\left(1+\frac{R4}{R3}\right)\frac{R2C2}{R1R2C1C2}\right)+\frac{1}{R1R2C1C2}}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{R4}{R3}\right)s^2}{s^2+s\left(\frac{1}{R2C2}+\frac{1}{R2C1}-\frac{R4}{R3}\cdot\frac{1}{R1C1}\right)+\frac{1}{R1R2C1C2}} \qquad \text{(式 5.1−8)}$$

5.2 多重帰還型回路の伝達関数導出

オペアンプ入力電圧 Vi を入力電圧 Vin と出力電圧 Vo から別々に計算して加算する。入力電圧 Vin 側は、図 5 に示すように C3 と他回路の接続点電圧を V2 とおいて、V2 を C2,R2 で分圧計算して Vi を求める。出力電圧 Vo 側は、図 6 に示す V3 を計算し、V3 から C2,R2 の分圧により Vi− を計算したうえで Vi を計算する。

図 5　多重帰還型回路の入力側

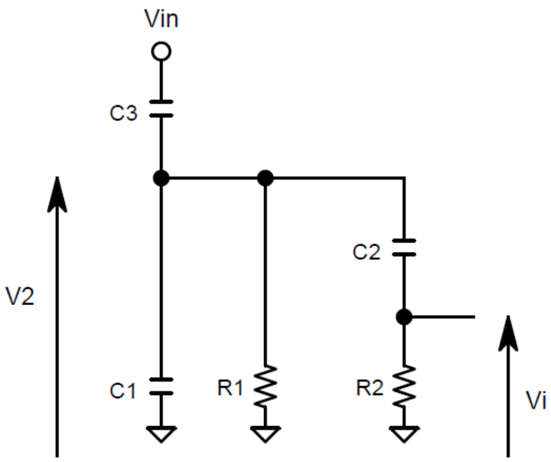
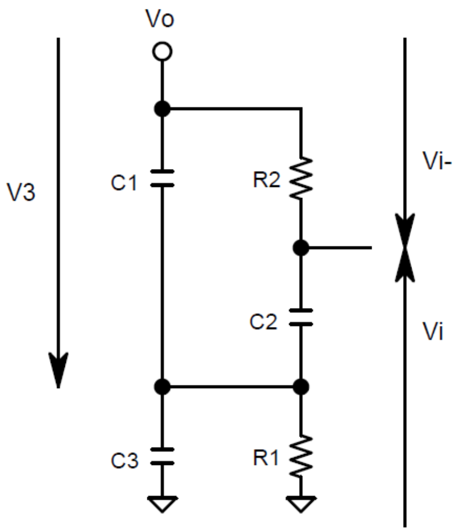


図6　多重帰還型回路の出力側



まず Vin に対する V2 を求める。C1,R1,C2,R2 によるインピーダンスを Z2 とすると、

$$V2=\frac{Z2}{ZC3+Z2}Vin=\frac{1}{\frac{ZC3}{Z2}+1}Vin=\frac{1}{\frac{1}{sC3}\left(\frac{1}{R1}+sC1+\frac{1}{R2+\frac{1}{sC2}}\right)+1}Vin$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{sC3R1}+\frac{sC1}{sC3}+\frac{sC2}{sC3(sR2C2+1)}+1}Vin \qquad \text{(式 5.2−1)}$$

Vin に対する Vi を Vii とすると、

$$\mathrm{Vii}=\frac{\mathrm{R2}}{\mathrm{R2}+\mathrm{ZC2}}\mathrm{V2}=\frac{\mathrm{sC2R2}}{\mathrm{sC2R2}+1}\mathrm{V2}=\frac{\mathrm{sC2R2}}{\mathrm{sC2R2}+1}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\mathrm{sC3R1}}+\frac{\mathrm{sC1}}{\mathrm{sC3}}+\frac{\mathrm{sC2}}{\mathrm{sC3(sR2C2}+1)}+1}\mathrm{Vin}$$

$$=\frac{\mathrm{sC2R2}}{\frac{\mathrm{sR2C2}+1}{\mathrm{sC3R1}}+(\mathrm{sR2C2}+1)\frac{\mathrm{sC1}}{\mathrm{sC3}}+\frac{\mathrm{sC2}}{\mathrm{sC3}}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vin}$$

$$=\frac{\mathrm{sC2R2}}{\frac{\mathrm{sR2C2}+1}{\mathrm{sC3R1}}+\frac{\mathrm{sR2C2C1}}{\mathrm{C3}}+\frac{\mathrm{C1}}{\mathrm{C3}}+\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{C3}}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vin}$$

$$=\frac{\mathrm{sC2R2sC3R1}}{\mathrm{sR2C2}+1+\mathrm{s^2R1R2C1C2}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{s^2R1C3R2C2}+\mathrm{sC3R1}}\mathrm{Vin}$$

$$=\frac{\mathrm{s^2R1R2C2C3}}{\mathrm{s^2R1R2C2(C1+C3)}+\mathrm{sR2C2}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{sR1C3}+1}\mathrm{Vin} \qquad \text{(式 5.2-2)}$$

次に Vo に対する V3 を求める。C1,R2,C2 の回路インピーダンスを Z3 とし, C3,R1 の回路インピーダンスを Z4 とすると、

$$\mathrm{Z3}=\frac{1}{\mathrm{sC1}+\frac{1}{\mathrm{R2}+\frac{1}{\mathrm{sC2}}}}=\frac{1}{\mathrm{sC1}+\frac{\mathrm{sC2}}{\mathrm{sR2C2}+1}}=\frac{\mathrm{sR2C2}+1}{\mathrm{s^2R2C1C2}+\mathrm{sC1}+\mathrm{sC2}}$$

$$\mathrm{Z4}=\frac{1}{\mathrm{sC3}+\frac{1}{\mathrm{R1}}}=\frac{\mathrm{R1}}{\mathrm{sR1C3}+1}$$

$$\mathrm{V3}=\frac{\mathrm{Z3}}{\mathrm{Z4}+\mathrm{Z3}}\mathrm{Vo}=\frac{1}{\frac{\mathrm{Z4}}{\mathrm{Z3}}+1}\mathrm{Vo}=\frac{1}{\frac{\mathrm{R1}}{\mathrm{sR1C3}+1}\cdot\frac{\mathrm{s^2R2C1C2}+\mathrm{sC1}+\mathrm{sC2}}{\mathrm{sR2C2}+1}+1}\mathrm{Vo}$$

$$=\frac{(\mathrm{sR1C3}+1)(\mathrm{sR2C2}+1)}{\mathrm{R1(s^2R2C1C2}+\mathrm{sC1}+\mathrm{sC2})+(\mathrm{sR1C3}+1)(\mathrm{sR2C2}+1)}\mathrm{Vo}$$

$$=\frac{(\mathrm{sR1C3}+1)(\mathrm{sR2C2}+1)}{\mathrm{s^2R1R2C1C2}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{s^2R1R2C2C3}+\mathrm{sR1C3}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vo}$$

$$=\frac{(\mathrm{sR1C3}+1)(\mathrm{sR2C2}+1)}{\mathrm{s^2R1R2C2(C1+C3)}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{sR1C3}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vo}$$

Vo に対する Vi を Vio とすると(図 6 の Vi−を Vim とすると)

$$\mathrm{Vio}=\mathrm{Vo}-\mathrm{Vim}=\mathrm{Vo}-\frac{\mathrm{R2}}{\mathrm{R2}+\mathrm{ZC2}}\mathrm{V3}=\mathrm{Vo}-\frac{\mathrm{sR2C2}}{\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{V3}$$

$$=\mathrm{Vo}-\frac{\mathrm{sR2C2}}{\mathrm{sR2C2}+1}\cdot\frac{(\mathrm{sR1C3}+1)(\mathrm{sR2C2}+1)}{\mathrm{s^2R1R2C2(C1+C3)}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{sR1C3}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vo}$$

$$=\mathrm{Vo}-\frac{\mathrm{sR2C2(sR1C3}+1)}{\mathrm{s^2R1R2C2(C1+C3)}+\mathrm{sR1C1}+\mathrm{sR1C2}+\mathrm{sR1C3}+\mathrm{sR2C2}+1}\mathrm{Vo} \qquad \text{(式 5.2-3)}$$

Vi は Vii+Vio であるから、

$$\mathrm{Vi} = \mathrm{Vii} + \mathrm{Vio}$$

$$= \frac{s^2\mathrm{R1R2C2C3}}{s^2\mathrm{R1R2C2(C1 + C3)} + s\mathrm{R2C2} + s\mathrm{R1C1} + s\mathrm{R1C2} + s\mathrm{R1C3} + 1}\mathrm{Vin} + \mathrm{Vo}$$

$$- \frac{s\mathrm{R2C2}(s\mathrm{R1C3} + 1)}{s^2\mathrm{R1R2C2(C1 + C3)} + s\mathrm{R1C1} + s\mathrm{R1C2} + s\mathrm{R1C3} + s\mathrm{R2C2} + 1}\mathrm{Vo}$$

Vi はオペアンプ+側とイマジナリーショートとなり結局 0 であるから、

$$0 = s^2\mathrm{R1R2C2C3Vin} + (s^2\mathrm{R1R2C2(C1 + C3)} + s\mathrm{R1C1} + s\mathrm{R1C2} + s\mathrm{R1C3} + s\mathrm{R2C2} + 1)\mathrm{Vo}$$
$$- s\mathrm{R2C2}(s\mathrm{R1C3} + 1)\mathrm{Vo}$$

Vin の項を左辺に移し、Vo の項を整理すると、

$$-s^2\mathrm{R1R2C2C3Vin} = (s^2\mathrm{R1R2C1C2} + s\mathrm{R1C1} + s\mathrm{R1C2} + s\mathrm{R1C3} + 1)\mathrm{Vo}$$

$$\frac{\mathrm{Vo}}{\mathrm{Vin}} = \frac{-s^2\mathrm{R1R2C2C3}}{s^2\mathrm{R1R2C1C2} + s\mathrm{R1C1} + s\mathrm{R1C2} + s\mathrm{R1C3} + 1} \qquad \text{(式 5.2−4)}$$

分子、分母を R1R2C1C2 で割ると回路の伝達関数が得られる。

$$\frac{\mathrm{Vo}}{\mathrm{Vin}} = \frac{-\frac{\mathrm{C3}}{\mathrm{C1}}s^2}{s^2 + s\frac{\mathrm{R1C1}}{\mathrm{R1R2C1C2}} + s\frac{\mathrm{R1C2}}{\mathrm{R1R2C1C2}} + s\frac{\mathrm{R1C3}}{\mathrm{R1R2C1C2}} + \frac{1}{\mathrm{R1R2C1C2}}}$$

$$= \frac{-\frac{\mathrm{C3}}{\mathrm{C1}}s^2}{s^2 + s\frac{\mathrm{C1}}{\mathrm{R2C1C2}} + s\frac{\mathrm{C2}}{\mathrm{R2C1C2}} + s\frac{\mathrm{C3}}{\mathrm{R2C1C2}} + \frac{1}{\mathrm{R1R2C1C2}}}$$

$$= \frac{-\frac{\mathrm{C3}}{\mathrm{C1}}s^2}{s^2 + s\frac{\mathrm{C1 + C2 + C3}}{\mathrm{R2C1C2}} + \frac{1}{\mathrm{R1R2C1C2}}} \qquad \text{(式 5.2−5)}$$

改訂履歴

版	日付	記事
1.0	2024/11/14	新規作成