半順序集合の初等的性質による Zorn の補題の証明

(arXiv:2305.10258)

縫田 光司（NUIDA, Koji）

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所（IMI）
（nuida@imi.kyushu-u.ac.jp）

日本数学会年会@大阪公立大学
2024 年 3 月 19 日

背景と結果の概要

- Zorn の補題は数学で頻出（それこそ、学部の講義でも登場）
- しかし、証明には集合論的な準備が必要で初学者には敷居が高い**と思われている**
  - 主張自体は半順序集合の簡単な語彙しか用いていないのに…
- 行ったこと：**半順序集合の基本的性質のみ**で Zorn の補題を証明
  - 既存の同様の証明よりもさらに初等的

Zorn の補題

主張

非空半順序集合 $(P, \leq)$ の鎖（全順序部分集合）がどれも P 内に上界をもてば、P は極大元をもつ

- 「普通の」証明：「もし極大元がなければ鎖を永遠に伸ばせてしまい矛盾」を超限再帰（←非初等的な集合論の道具）で厳密化
- [Lewin, Amer. Math. Monthly 1991]：話者の知る限り最も初等的な既存の証明
  - もっと簡潔にしたい
  - 特に、↑の証明は（主張には現れない）整列集合の概念に基づく（←省きたい）

証明の骨格

- 最大元がないと仮定 → 鎖にその真の上界を割り当てる関数 f が（選択公理で）存在
- $\mathcal{C}$:「f と整合的」な鎖全体の集合
- → $\mathcal{C}$ 全体の和 $C^* := \bigcup \mathcal{C}$ も鎖で、$\mathcal{C}$ に属する
- → $C^{**} := C^* \cup \{f(C^*)\}$ も鎖で、$\mathcal{C}$ に属する
- しかし構成より $C^{**} \not\subseteq \bigcup \mathcal{C}$（矛盾） $\square$

- これ自体は Lewin の証明と同様
    - $\mathcal{C}$ の定義が Lewin と異なる

鎖の集合 $\mathcal{C}$ の定義

- $U_X := \{a \in P \setminus X : a$ は X の（真の）上界$\}$
- C：鎖 $\rightsquigarrow \exists f(U_C) \in U_C$（選択公理）
- $C^* := \bigcup \mathcal{C}$　$\mathcal{C}$ は以下で定義：

鎖の集合 $\mathcal{C}$ の定義

- $U_X := \{a \in P \setminus X : a$ は X の（真の）上界$\}$
- C：鎖 $\rightsquigarrow \exists f(U_C) \in U_C$（選択公理）
- $C^* := \bigcup \mathcal{C}$　$\mathcal{C}$ は以下で定義：
- 補助的な集合 $\mathcal{C}_0$：(i-C) を満たす鎖 C 全体

(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$

  - 「S が C の天井に届かなければ $f(U_S) \in C$」

鎖の集合 $\mathcal{C}$ の定義

- $U_X := \{a \in P \setminus X : a$ は X の（真の）上界$\}$
- C：鎖 $\rightsquigarrow \exists f(U_C) \in U_C$（選択公理）
- $C^* := \bigcup \mathcal{C}$　$\mathcal{C}$ は以下で定義：
- 補助的な集合 $\mathcal{C}_0$：(i-C) を満たす鎖 C 全体

  (i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$

  - 「S が C の天井に届かなければ $f(U_S) \in C$」
- 集合 $\mathcal{C}$：(ii-C) を満たす鎖 $C \in \mathcal{C}_0$ 全体

  (ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

  - 「C の元は他の $C' \in \mathcal{C}_0$ の中か上に居る」

証明：$C^* := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C\text{)}\}$, $\quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C\text{)}\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^*)：$C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_C (C \setminus C') \subseteq U_{C'}$ (ii-C) $\square$

証明：$C^* := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, (\text{i-}C)\}$, $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : (\text{ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^*)：$C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_C (C \setminus C') \subseteq U_{C'}$ (ii-C) $\square$
- $x \in C' \in \mathcal{C}$ と $y \in C^*$ が比較可能：$y \in C'$ なら鎖ゆえ成立、$\notin$ なら (ii-C^*) より $y \in U_{C'}$ $\square$

証明：$C^* := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C)\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^*)：$C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_C (C \setminus C') \subseteq U_{C'}$ (ii-C) $\square$
- $x \in C' \in \mathcal{C}$ と $y \in C^*$ が比較可能：$y \in C'$ なら鎖ゆえ成立、$\notin$ なら (ii-C^*) より $y \in U_{C'}$ $\square$
- (i-C^*)：$U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_C U_C \therefore \exists C; \exists x \in U_S \setminus U_C$

証明：$C^* := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C)\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^*)：$C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_C (C \setminus C') \subseteq U_{C'}$ (ii-C) $\square$
- $x \in C' \in \mathcal{C}$ と $y \in C^*$ が比較可能：$y \in C'$ なら鎖ゆえ成立、$\notin$ なら (ii-C^*) より $y \in U_{C'}$ $\square$
- (i-C^*)：$U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_C U_C \therefore \exists C; \exists x \in U_S \setminus U_C$

  $\exists y \in S \setminus C$（$\subseteq C^* \setminus C \subseteq U_C$ (ii-C^*)）なら
  $x > y \in U_C$（$\because x \in U_S$）$\therefore x \in U_C$（矛盾）

証明：$C^* := \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, (\text{i-}C)\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : (\text{ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^*)：$C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_C (C \setminus C') \subseteq U_{C'}$ (ii-C) □
- $x \in C' \in \mathcal{C}$ と $y \in C^*$ が比較可能：$y \in C'$ なら鎖ゆえ成立、$\notin$ なら (ii-C^*) より $y \in U_{C'}$ □
- (i-C^*)：$U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_C U_C \therefore \exists C; \exists x \in U_S \setminus U_C$

  $\exists y \in S \setminus C$（$\subseteq C^* \setminus C \subseteq U_C$ (ii-C^*)）なら
  $x > y \in U_C$（$\because x \in U_S$）$\therefore x \in U_C$（矛盾）

  $\therefore S \subseteq C \therefore f(U_S) \in C \subseteq C^*$ (i-C) □

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$ $(u := f(U_{C^*}))$ (1/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C\text{)}\}$, $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C\text{)}\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- C^{**} は鎖：定義より $\square$

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, (\text{i-}C)\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : (\text{ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- C^{**} は鎖：定義より $\square$
- (i-C^{**})：$u \in S \Rightarrow U_S \subseteq U_{\{u\}} \subseteq U_{C^{**}}$（矛盾）

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$（$u := f(U_{C^*})$）　(1/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C\text{)}\}$, $\quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C\text{)}\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- C^{**} は鎖：定義より　$\square$
- (i-C^{**})：$u \in S \Rightarrow U_S \subseteq U_{\{u\}} \subseteq U_{C^{**}}$（矛盾）
  $\therefore S \subseteq C^* \therefore U_{C^*} \subseteq U_S$
  場合分けで $f(U_S) \in C^{**}$ を示す：

$\mathcal{C}_0 := \{C :$ 鎖, (i-C)$\}$, $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 :$ (ii-C)$\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- C^{**} は鎖：定義より $\square$
- (i-C^{**})：$u \in S \Rightarrow U_S \subseteq U_{\{u\}} \subseteq U_{C^{**}}$（矛盾）
  $\therefore S \subseteq C^* \therefore U_{C^*} \subseteq U_S$
  場合分けで $f(U_S) \in C^{**}$ を示す：
  - $U_S \subseteq U_{C^*} \Rightarrow U_{C^*} = U_S \therefore f(U_S) = u$

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$ （$u := f(U_{C^*})$） (1/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C\text{)}\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C\text{)}\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- C^{**} は鎖：定義より $\square$
- (i-C^{**})：$u \in S \Rightarrow U_S \subseteq U_{\{u\}} \subseteq U_{C^{**}}$ （矛盾）
  $\therefore S \subseteq C^* \therefore U_{C^*} \subseteq U_S$
  場合分けで $f(U_S) \in C^{**}$ を示す：
  - $U_S \subseteq U_{C^*} \Rightarrow U_{C^*} = U_S \therefore f(U_S) = u$
  - $U_S \not\subseteq U_{C^*} \Rightarrow f(U_S) \in C^*$ (i-C^*) $\square$

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$ $(u := f(U_{C^*}))$ (2/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, (\text{i-}C)\}$, $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : (\text{ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^{**})：$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ (i-C^*)

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$ （$u := f(U_{C^*})$） (2/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : \text{鎖}, \text{(i-}C)\}$,　$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^{**})：$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ (i-C^*)
  $u \in C'$ または $u \in U_{C'}$ を場合分けで示す：

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$（$u := f(U_{C^*})$）　(2/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C)\}, \quad \mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C)\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^{**})：$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ (i-C^*)
  $u \in C'$ または $u \in U_{C'}$ を場合分けで示す：
  - $\exists x \in C^* \setminus C'$（$\subseteq U_{C'}$ (ii-C^*)）：
    $u > x \in U_{C'}$ $\therefore u \in U_{C'}$

$\mathcal{C}_0 := \{C :$ 鎖, (i-C)$\}$,　$\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 :$ (ii-C)$\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^{**})：$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ (i-C^*)
  $u \in C'$ または $u \in U_{C'}$ を場合分けで示す：
  - $\exists x \in C^* \setminus C'$（$\subseteq U_{C'}$ (ii-C^*)）：
    $u > x \in U_{C'}$ $\therefore u \in U_{C'}$
  - $C^* \subseteq C'$ かつ $U_{C^*} \subseteq U_{C'}$：$u \in U_{C^*} \subseteq U_{C'}$

証明：$C^{**} := C^* \cup \{u\} \in \mathcal{C}$ （$u := f(U_{C^*})$） (2/2)

$\mathcal{C}_0 := \{C : 鎖, \text{(i-}C\text{)}\}$, $\mathcal{C} := \{C \in \mathcal{C}_0 : \text{(ii-}C\text{)}\}$
(i-C) $[S \subseteq C$ かつ $U_S \not\subseteq U_C] \Rightarrow f(U_S) \in C$
(ii-C) $C' \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow C \setminus C' \subseteq U_{C'}$

- (ii-C^{**})：$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ (i-C^*)
  $u \in C'$ または $u \in U_{C'}$ を場合分けで示す：
  - $\exists x \in C^* \setminus C'$ （$\subseteq U_{C'}$ (ii-C^*)）：
    $u > x \in U_{C'}$ $\therefore u \in U_{C'}$
  - $C^* \subseteq C'$ かつ $U_{C^*} \subseteq U_{C'}$ ：$u \in U_{C^*} \subseteq U_{C'}$
  - $C^* \subseteq C'$ かつ $U_{C^*} \not\subseteq U_{C'}$ ：
    $u = f(U_{C^*}) \in C'$ (i-C') □
- これで証明が完了した □

まとめ

- 行ったこと：**半順序集合の基本的性質のみ**でZorn の補題を証明
    - 既存の同様の証明よりもさらに初等的
- arXiv:2305.10258
- よろしければ講義や著書にご活用ください