超限帰納法抜きで選択公理から Zorn の補題を証明してみた

縫田 光司

2011 年 11 月 13 日（初版）、2023 年 5 月 18 日（第 6 版）

概要

このノートでは、超限帰納法を使わずに選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える（なお、このノートの初版での証明のアイデアは [4, Theorem 4.19] と同じであったが、現在の証明は [2] の改良である）。この証明の特徴として、[2] の証明などで用いられていた整列順序の概念すら必要とせず、Zorn の補題の主張が理解できる程度の半順序集合に関する知識（と、選択公理が何であるかの知識）があれば理解可能である。

このノートを通して、$(X, \leq)$ は空でない半順序集合で、どの鎖（全順序部分集合のこと）も X における上界をもつものとする。**Zorn の補題**とは、この X が常に極大元をもつという主張である。選択公理から Zorn の補題を（集合論の Zermelo–Fraenkel 公理系の下で）証明する際、「自然な」方針では通常は超限帰納法のお世話になるのだが、ここでは超限帰納法を使わない証明（筆者のプレプリント [3] と同じもの）を紹介する。

証明. X が極大元をもたないと仮定して矛盾を導く。$\mathcal{T} := \{C \subseteq X \mid C \text{ は鎖}\}$ と定める。$C \in \mathcal{T}$ について $U_C := \{x \in X \mid y \in C \text{ であれば } y < x\}$ と定める。このとき $U_C \cap C = \emptyset$ であり、また、仮定より C の上界 $x \in X$ が存在してさらに極大でないことから $\emptyset \neq U_{\{x\}} \subseteq U_C$、したがって $U_C \neq \emptyset$ である。$\{S \subseteq X \mid S = U_C \text{ を満たす } C \in \mathcal{T} \text{ が存在する}\}$ は非空集合からなる集合族であり、選択公理によりその選択関数 f が得られる。すなわち $C \in \mathcal{T}$ のとき $f(U_C) \in U_C$ である。$\mathcal{T}$ の元 C で条件 (i-C)「$S \subseteq C, U_S \not\subseteq U_C$ のとき $f(U_S) \in C$」を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}_0$ で表す。また、$\mathcal{C}_0$ の元 C で条件 (ii-C)「$C' \in \mathcal{C}_0$ のとき $C \setminus C' \subseteq U_{C'}$」を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}$ で表す。$C^* := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$ と定め、$C^* \in \mathcal{C}$ であることを示す。

$C' \in \mathcal{C}_0$ のとき $C^* \setminus C' \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \setminus C' \subseteq U_{C'}$（各 $C \in \mathcal{C}$ での (ii-C) より）となり、(ii-C^*) が成り立つ。また、$x, y \in C^*$ とすると、ある $C \in \mathcal{C}$ について $x \in C$ である。すると、$y \in C$ であれば $C \in \mathcal{T}$ より $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立ち、一方で $y \notin C$ であれば (ii-C^*) より $y \in C^* \setminus C \subseteq U_C$、したがって $x < y$ が成り立つ。よっていずれにしても $x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立ち、$C^* \in \mathcal{T}$ である。さらに、$S \subseteq C^*$ かつ $U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} U_C$ のとき、ある $C \in \mathcal{C}$ について $U_S \not\subseteq U_C$ であり、さらにある $x \in U_S$ について $x \notin U_C$ である。すると $y \in S$ について $y < x$ より $y \notin U_C$ である。すなわち $S \cap U_C = \emptyset$ である。(ii-C^*) より $S \setminus C \subseteq C^* \setminus C \subseteq U_C$ であるから、$S \subseteq C$ が成り立つ。よって (i-C) より $f(U_S) \in C \subseteq C^*$ となり、(i-C^*) が成り立つ。よって $C^* \in \mathcal{C}$ である。$u := f(U_{C^*}), C^{**} := C^* \cup \{u\}$ と定める。

u は C^{**} の最大元であるから、C^* と同様に C^{**} も鎖である。$S \subseteq C^{**}$ かつ $U_S \not\subseteq U_{C^{**}}$ のとき、$u \notin S$（さもなくば $U_S = U_{\{u\}} = U_{C^{**}}$ である）より $S \subseteq C^*$、したがって $U_{C^*} \subseteq U_S$ である。ここで $U_S \subseteq U_{C^*}$ であれば $U_S = U_{C^*}$ となり、$f(U_S) = f(U_{C^*}) = u \in C^{**}$ となる。一方 $U_S \not\subseteq U_{C^*}$ であれば、(i-C^*) より $f(U_S) \in C^* \subseteq C^{**}$ となる。いずれにしても $f(U_S) \in C^{**}$ となり、$C^{**} \in \mathcal{C}_0$ である。$C^{**} \not\subseteq C^*$ より $C^{**} \notin \mathcal{C}$ であり、したがってある $C' \in \mathcal{C}_0$ について $C^{**} \setminus C' \not\subseteq U_{C'}$ である。(ii-C^*) より $C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ であるので、$u \notin C'$ かつ $u \notin U_{C'}$ である（さもなくば $\emptyset \neq (C^{**} \setminus C') \setminus U_{C'} = (C^* \setminus C') \setminus U_{C'} = \emptyset$ となり矛盾する）。これと $u \in U_{C^*}$ より $U_{C^*} \not\subseteq U_{C'}$ かつ $C^* \cap U_{C'} = \emptyset$、したがって $C^* \subseteq C'$ となる。すると (i-C') を $C^* \subseteq C'$ に適用して、$u \in C'$ となるが、これは矛盾である。以上で Zorn の補題が証明された。 □

おまけ 1：大幅に詳しく書いた証明

上記の証明は筆者の普段の感覚で書いた証明であるが、初学者のために、この証明をより詳しくしてみる。

1. 背理法により、X が極大元をもたないと仮定して矛盾を導けばよい。
2. まず、鎖 $C \subseteq X$ と部分集合 $S \subseteq C$ について、S も鎖である。証明は下記の通り：
   (a) 鎖の定義より、これを示すには、$x, y \in S$ と仮定して、$x \leq y$ と $y \leq x$ の少なくとも一方が成り立つことを示せばよい。
   (b) 2. の仮定より $S \subseteq C$ であるから、$x, y \in C$ である。
   (c) これと C が鎖であること（2. の仮定）から、確かに $x \leq y$ と $y \leq x$ の少なくとも一方が成り立つ。
3. 鎖 $C \subseteq X$ について、$U_C := \{x \in X \mid y \in C \text{ であれば } y < x\}$ と定める。このとき $U_C \cap C = \emptyset$ である。証明は下記の通り：
   (a) もし $x \in U_C \cap C$ であるとすると、U_C の定義より、どの $y \in C$ についても $y < x$ である。
   (b) これを $y := x \in C$ に適用すると、$x < x$ となる。これは矛盾である。
4. この集合 U_C の性質をいくつか調べておく。まず、C_1 と C_2 が X の鎖であり $C_1 \subseteq C_2$ であれば、$U_{C_2} \subseteq U_{C_1}$ である。証明は下記の通り：
   (a) これを示すには、$x \in U_{C_2}$ と仮定して、$x \in U_{C_1}$ を示せばよい。これを示すには、$y \in C_1$ と仮定して、$y < x$ を示せばよい。証明は下記の通り：
      i. $C_1 \subseteq C_2$（4. の仮定）と $y \in C_1$（4a. の仮定）より、$y \in C_2$ である。
      ii. これと $x \in U_{C_2}$（4a. の仮定）および U_{C_2} の定義より、確かに $y < x$ である。
5. $x, y \in X$ について、$U_{\{x\}}$ の定義より、$x < y$ と $y \in U_{\{x\}}$ は同値である（1 元集合 $\{x\}$ は X の鎖であることを注意しておく）。
6. 鎖 $C \subseteq X$ と C の上界 $x \in X$ について、$U_{\{x\}} \subseteq U_C$ である。証明は下記の通り：
   (a) これを示すには、$y \in U_{\{x\}}$ と仮定して、$y \in U_C$ を示せばよい。これを示すには、$z \in C$ と仮定して、$z < y$ を示せばよい。証明は下記の通り：
      i. $y \in U_{\{x\}}$（6a. の仮定）と 5. より、$x < y$ である。
      ii. $z \in C$（6a. の仮定）と、x が C の上界であること（6. の仮定）より、$z \leq x$ である。
      iii. これと 6 (a) i. より、$z \leq x < y$ であり、したがって確かに $z < y$ である。
7. 鎖 $C \subseteq X$ について、$x \in U_C, y \in X, x \leq y$ のとき $y \in U_C$ である。証明は下記の通り：
   (a) これを示すには、$z \in C$ と仮定して、$z < y$ を示せばよい。証明は下記の通り：
      i. この仮定 $z \in C$ および $x \in U_C$（7. の仮定）より、$z < x$ である。
      ii. これと $x \leq y$（7. の仮定）より、確かに $z < y$ である。
8. C_1 と C_2 が X の鎖であり $U_{C_1} \not\subseteq U_{C_2}$ であれば、$C_1 \cap U_{C_2} = \emptyset$ である。証明は下記の通り：
   (a) この仮定 $U_{C_1} \not\subseteq U_{C_2}$ より、ある $y \in U_{C_1}$ について $y \notin U_{C_2}$ となる。
   (b) ここで、もし $x \in C_1 \cap U_{C_2}$ であるとすると、$y \in U_{C_1}$（8a.）より、$x < y$ である。
   (c) これと $x \in U_{C_2}$（8b. の仮定）および 7. より、$y \in U_{C_2}$ となるが、これは 8a. と矛盾する。
9. 鎖 $C \subseteq X$ について、$U_C \neq \emptyset$ である。証明は下記の通り：
   (a) Zorn の補題の仮定より、鎖 C は上界 $x \in X$ をもつ。
   (b) 6. より、$U_{\{x\}} \subseteq U_C$ である。

(c) 背理法（1.）の仮定より、x は X の極大元ではない。つまり、ある $y \in X$ について $x < y$ が成り立つ。

(d) これと 5. より、$y \in U_{\{x\}}$ である。

(e) これと 9b. より、$y \in U_C$ であり、したがって確かに $U_C \neq \emptyset$ である。

10. 9. より、$\{S \subseteq X \mid \text{ある鎖 } C \subseteq X \text{ について } S = U_C\}$ は非空集合からなる集合族であるから、選択公理によりその選択関数 f が得られる。すなわち、鎖 $C \subseteq X$ について $f(U_C)$ は U_C の元である。
11. これと 3. より、鎖 $C \subseteq X$ について $f(U_C) \notin C$ である。
12. 鎖 $C \subseteq X$ のうち、条件

$$(\text{i-}C) \quad S \subseteq C, U_S \not\subseteq U_C \text{ のとき } f(U_S) \in C$$

を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}_0$ で表す。（なお、2. より、条件に現れる S も鎖であり、U_S や $f(U_S)$ が定義されることを注意しておく。）

13. 鎖 $C \subseteq X$ のうち、条件 (i-C) を満たし（つまり $C \in \mathcal{C}_0$ であり）、さらに条件

$$(\text{ii-}C) \quad C' \in \mathcal{C}_0 \text{ のとき } C \setminus C' \subseteq U_{C'}$$

を満たすもの全体の集合を $\mathcal{C}$ で表す。

14. $C^* := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \subseteq X$ と定義する。この定義より、$C \in \mathcal{C}$ のとき $C \subseteq C^*$ が成り立つ。
15. $C^* \in \mathcal{C}$ を示す。それには、C^* が鎖であることと、条件 (i-C^*) と、条件 (ii-C^*) を示せばよい。

(a) 条件 (ii-C^*)、つまり、$C' \in \mathcal{C}_0$ のとき $C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ であることを示す。それには、$x \in C^*$ かつ $x \notin C'$ と仮定して、$x \in U_{C'}$ を示せばよい。証明は下記の通り：

i. $x \in C^*$（15a. の仮定）と C^* の定義（14.）より、ある $C \in \mathcal{C}$ について $x \in C$ が成り立つ。

ii. これと $x \notin C'$（15a. の仮定）より、$x \in C \setminus C'$ である。

iii. $C \in \mathcal{C}$（15 (a) i.）より条件 (ii-C) が成り立つ。

iv. この条件 (ii-C) を $C' \in \mathcal{C}_0$（15a.）に適用して、$C \setminus C' \subseteq U_{C'}$ となる。

v. これと 15 (a) ii. より、確かに $x \in U_{C'}$ が成り立つ。

(b) C^* が鎖であることを示す。それには、$x, y \in C^*$ と仮定して、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つことを示せばよい。証明は下記の通り：

i. C^* の定義（14.）より、ある $C \in \mathcal{C}$ について $x \in C$ が成り立つ。

ii. $\mathcal{C}$ の定義（13.）より、C は鎖であり、また $C \in \mathcal{C}_0$ である。

iii. $y \in C$ または $y \notin C$ の場合分けを行う。まず、$y \in C$ と仮定する。

A. この仮定と 15 (b) i. より、$x, y \in C$ である。

B. これと C が鎖であること（15 (b) ii.）より、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ。

iv. 次に、$y \notin C$ と仮定する。

A. この仮定と $y \in C^*$（15b.）より、$y \in C^* \setminus C$ である。

B. すると、条件 (ii-C^*)（15a.）を $C \in \mathcal{C}_0$（15 (b) ii.）に適用して、$y \in U_C$ となる。

C. これと U_C の定義（3.）および $x \in C$（15 (b) i.）より、$x < y$、したがって $x \leq y$ が成り立つ。

v. よって、どちらの場合にも、$x \leq y$ または $y \leq x$ が確かに成り立つ。

(c) 条件 (i-C^*)、つまり、$S \subseteq C^*, U_S \not\subseteq U_{C^*}$ のとき $f(U_S) \in C^*$ であることを示す。証明は下記の通り：

i. $U_S \not\subseteq U_{C^*}$（15c. の仮定）より、ある $x \in U_S$ について $x \notin U_{C^*}$ が成り立つ。
ii. これと U_{C^*} の定義（3.）より、ある $y \in C^*$ について $y \not< x$ が成り立つ。
iii. C^* の定義（14.）より、ある $C \in \mathcal{C}$ について $y \in C$ が成り立つ。
iv. これと $y \not< x$（15 (c) ii.）より、$x \notin U_C$ である。
v. これと $x \in U_S$（15 (c) i.）より、$U_S \not\subseteq U_C$ である。
vi. これと 8. より、$S \cap U_C = \emptyset$ である。
vii. $C \in \mathcal{C}$（15 (c) iii.）および $\mathcal{C}$ の定義（13.）より、$C \in \mathcal{C}_0$ である。
viii. $S \subseteq C$ を示す。それには、$z \in S$ かつ $z \notin C$ と仮定して矛盾を導けばよい。証明は下記の通り：
  A. この仮定と $S \subseteq C^*$（15c. の仮定）より $z \in C^*$、したがって $z \in C^* \setminus C$ となる。
  B. すると、条件 (ii-C^*)（15a.）を $C \in \mathcal{C}_0$（15 (c) vii.）に適用して、$z \in U_C$ となる。
  C. これと $z \in S$（15 (c) viii. の仮定）より $z \in S \cap U_C$ となるが、これは 15 (c) vi. と矛盾する。
ix. $C \in \mathcal{C}_0$（15 (c) vii.）と $S \subseteq C$（15 (c) viii.）と $U_S \not\subseteq U_C$（15 (c) v.）より、条件 (i-C) を S に適用して、$f(U_S) \in C$ となる。
x. $C \in \mathcal{C}$（15 (c) iii.）と 14. より、$C \subseteq C^*$ である。
xi. これと 15 (c) ix. より、確かに $f(U_S) \in C^*$ が成り立つ。

16. $u := f(U_{C^*}), C^{**} := C^* \cup \{u\}$ と定める。
17. 選択関数 f の選び方（10.）より、$u \in U_{C^*}$ であるので、u は C^{**} の最大元である。
18. これと $u = f(U_{C^*}) \notin C^*$（11.）より、$C^{**} \not\subseteq C^*$ である。
19. これと 14. より、$C^{**} \notin \mathcal{C}$ である。
20. C^{**} が鎖であることを示す。それには、$x, y \in C^{**}$ と仮定して、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つことを示せばよい。証明は下記の通り：
  (a) $x = u$ であれば、u が C^{**} の最大元であること（17.）から、$y \leq x$ となる。
  (b) 対称性より、$y = u$ の場合も同様に、$x \leq y$ となる。よってこれらの場合には確かに、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ。
  (c) 残る場合である $x \neq u$ かつ $y \neq u$ の場合には、C^{**} の定義（16.）より $x, y \in C^*$ である。
  (d) これと C^* が鎖であること（15b.）から確かに、$x \leq y$ または $y \leq x$ が成り立つ。
21. 条件 (i-C^{**})、つまり、$S \subseteq C^{**}, U_S \not\subseteq U_{C^{**}}$ のとき $f(U_S) \in C^{**}$ であることを示す。証明は下記の通り：
  (a) $u \notin S$ を示す。証明は下記の通り：
    i. もし $u \in S$ であるとすると、$\{u\} \subseteq S$ であり、4. より $U_S \subseteq U_{\{u\}}$ である。
    ii. 17. より u は C^{**} の上界である。
    iii. これと 6. より $U_{\{u\}} \subseteq U_{C^{**}}$ である。
    iv. これと 21 (a) i. より $U_S \subseteq U_{C^{**}}$ となるが、これは 21. の仮定 $U_S \not\subseteq U_{C^{**}}$ と矛盾する。
  (b) $S \subseteq C^{**}$（21. の仮定）と 21a. より、$S \subseteq C^*$ となる。
  (c) これと 4. より、$U_{C^*} \subseteq U_S$ となる。
  (d) $U_S \subseteq U_{C^*}$ または $U_S \not\subseteq U_{C^*}$ の場合分けを行う。まず、$U_S \subseteq U_{C^*}$ と仮定する。
    i. この仮定と 21c. より、$U_S = U_{C^*}$ であり、したがって $f(U_S) = f(U_{C^*}) = u \in C^{**}$ である。
  (e) 次に、$U_S \not\subseteq U_{C^*}$ と仮定する。

i. この仮定と $S \subseteq C^*$（21b.)、および条件 (i-C^*)（15c.）より、$f(U_S) \in C^*$ となる。

ii. これと、C^{**} の定義（16.）より $C^* \subseteq C^{**}$ であることから、$f(U_S) \in C^{**}$ となる。

(f) よって、どちらの場合にも、$f(U_S) \in C^{**}$ が確かに成り立つ。

22. 19. と 20. と 21.、および $\mathcal{C}$ の定義（13.）より、条件 (ii-C^{**}) は成り立たない。したがって、ある $C' \in \mathcal{C}_0$ について $C^{**} \setminus C' \not\subseteq U_{C'}$ となり、ある $x \in C^{**} \setminus C'$ について $x \notin U_{C'}$ となる。
23. 条件 (ii-C^*)（15a.）をこの $C' \in \mathcal{C}_0$（22.）に適用して、$C^* \setminus C' \subseteq U_{C'}$ となる。
24. $x \notin C^*$ を示す。証明は下記の通り：
    (a) もし $x \in C^*$ であるとすると、$x \notin C'$（22.）より $x \in C^* \setminus C'$ である。
    (b) これと 23. より、$x \in U_{C'}$ となるが、これは 22. と矛盾する。
25. 22. より $x \in C^{**}$ であり、これと 24. より $x = u$ となる。
26. これと 22. より、$u \notin C'$ かつ $u \notin U_{C'}$ となる。
27. これと $u = f(U_{C^*}) \in U_{C^*}$（10.）より、$U_{C^*} \not\subseteq U_{C'}$ である。
28. これと 8. より、$C^* \cap U_{C'} = \emptyset$ である。
29. $C^* \subseteq C'$ を示す。証明は下記の通り：
    (a) もし $y \in C^*$ かつ $y \notin C'$、つまり $y \in C^* \setminus C'$ であるとすると、23. より $y \in U_{C'}$、したがって $y \in C^* \cap U_{C'}$ となるが、これは 28. と矛盾する。
30. $C' \in \mathcal{C}_0$（22.）と $C^* \subseteq C'$（29.）と $U_{C^*} \not\subseteq U_{C'}$（27.）より、条件 (i-$C'$) を $C^* \subseteq C'$ に適用して、$f(U_{C^*}) \in C'$ となる。
31. しかし、26. より $u = f(U_{C^*}) \notin C'$ である。これは矛盾である。
32. 以上で Zorn の補題が証明された。

おまけ 2：超限帰納法を用いた証明

このおまけでは、比較のために、超限帰納法を用いて選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える。最初に、超限再帰的定義に関する原理を述べておく（例えば [1, 第 I 章定理 9.3] を参照)。

定理 1. $\varphi(x,y)$ を（Zermelo–Fraenkel 集合論における）式で自由変数 x と y をもち、$\forall x \exists! y \varphi(x,y)$ を満たすものとする。このとき、自由変数 x と y をもつ式 $\Phi(x,y)$ で以下の二つの条件を満たすものが存在する。

1. $\forall x((x \in \mathbf{ON} \to \exists! y \Phi(x,y)) \wedge (\neg x \in \mathbf{ON} \to \neg \exists y \varphi(x,y)))$
2. $\forall x(x \in \mathbf{ON} \to \forall y, z(y = \Phi{\restriction}_x \wedge \varphi(y,z) \to \Phi(x,z)))$

ただし、「$x \in \mathbf{ON}$」は「x は順序数」の略記とし、「$\Phi{\restriction}_x$」は集合 $\{\langle a,b \rangle \mid a \in x \wedge \Phi(a,b)\}$（$\langle a,b \rangle$ は a と b の順序対）の略記とする。

この定理の直感的な意味は以下の通りである：順序数全体（これは集合をなさないのであるが）で定義される「関数」Φ を得たいとき、順序数 α における値を α より小さな順序数における値から定める方法を指定すれば、その条件を満たす「関数」Φ が確かに存在する。この定理は ZF 集合論における定理であり、選択公理は用いていないことを注意しておく。

定理 1（と超限帰納法）を用いて、選択公理から Zorn の補題を証明する。$X \neq 0$ $(= \emptyset)$ を、Zorn の補題の主張に現れる半順序集合とする。背理法の仮定として、X は極大元をもたないと仮定する。すると、X の空でな

い部分集合 C のうち、ある順序数と同型な（特に全順序集合である）ものの各々について、選択公理を用いて C の上界 $b_C \in X \setminus C$ を一つずつ選ぶことができる。

定理 1 を適用すべく、まず X の元 a を一つ固定しておき、式 $\varphi(x,y)$ を以下の要領で定義する。

- $x = 0$ のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = a$ を意味するように定める。
- x がある順序数 $\alpha > 0$ から X への関数であって像 $\mathrm{Im}(x)$ への（半順序集合としての）同型写像であるとき、$\varphi(x,y)$ は $y = b_{\mathrm{Im}(x)}$ を意味するように定める（$\mathrm{Im}(x)$ は空でない順序数 α と同型なので、$b_{\mathrm{Im}(x)}$ が確かに定義されることを注意しておく）。
- それ以外のとき、$\varphi(x,y)$ は $y = 0$ を意味するように定める。

この式 $\varphi(x,y)$ は定理 1 の前提を満たすので、定理の主張にあるような式 $\Phi(x,y)$ が存在する。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 1. x を順序数とし、x' を $\Phi(x,x')$ が成り立つ唯一の元とする。このとき、

1. $x' \in X$ である。
2. $y < x$ かつ $\Phi(y,y')$ が成り立つならば、X において $y' < x'$ である。

証明. x に関する超限帰納法を用いて証明する。まず、$x = 0$ のときは、φ の定義より $x' = a$ となるので、件の条件が成り立つ。次に $x > 0$ のときを考える。超限帰納法の仮定より、定理 1 の主張に現れる集合 $\Phi\restriction_x$ は x から X のある部分集合 C への同型写像となる（x は全順序集合であることを注意しておく）。このとき Φ と φ の定義より $x' = b_C$ となり、したがって件の条件は x に関しても成り立つ（二つ目の条件については、$b_C \in X \setminus C$ が C の上界であることから導かれる）。以上より主張が成り立つ。 □

補題 1 の二つ目の性質より、各 $v \in X$ について、$\Phi(x,v)$ を満たす順序数 x は高々一つしか存在しない。X の部分集合 X' を、ある（一意に定まる）順序数 x について $\Phi(x,v)$ が成り立つような $v \in X$ 全体の集合として定める。置換公理を集合 X' と式 $\Phi'(x,y) := \Phi(y,x)$ に適用すると、順序数 y のうち、$\Phi(y,y')$ を満たす唯一の y' が X' に属するような y をすべて要素にもつ集合 Y の存在が示される。ここで補題 1 の一つ目の性質より、この集合 Y はすべての順序数を要素にもつことになる。しかし、これは Burali–Forti の逆理（すなわち、すべての順序数を要素にもつ集合は存在しない、という定理）に矛盾する。したがって背理法により、X は極大元をもつ。以上で Zorn の補題が証明された。

参考文献

[1] ケネス・キューネン（著）、藤田博司（訳）、『集合論　独立性証明への案内』、日本評論社、2008 年

[2] J. Lewin, “A Simple Proof of Zorn’s Lemma”, Amer. Math. Monthly **98**(4) (1991), 353–354

[3] K. Nuida, “A Simple and Elementary Proof of Zorn’s Lemma”, arXiv:2305.10258v1 (`https://arxiv.org/abs/2305.10258`), 2023

[4] H. Rubin, J. E. Rubin, “Equivalents of the Axiom of Choice, II”, Second Edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.116, North-Holland, 1985