超限帰納法抜きで選択公理から Zorn の補題を証明してみた

縫田 光司

2011 年 11 月 13 日（初版）、2024 年 7 月 12 日（第 7 版）

概要

このノートでは、超限帰納法を使わずに選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える（なお、このノートの初版での証明のアイデアは [4, Theorem 4.19] と同じであったが、現在の証明は [2] の改良である）。この証明の特徴として、[2] の証明などで用いられていた整列順序の概念すら必要とせず、Zorn の補題の主張が理解できる程度の半順序集合に関する知識（と、選択公理が何であるかの知識）があれば理解できる。

選択公理から Zorn の補題を（集合論の Zermelo–Fraenkel 公理系の下で）証明する際、「自然な」方針では通常は超限帰納法のお世話になるのだが、ここでは超限帰納法を使わない証明（筆者の論文 [3]）を紹介する。

記号と用語の説明

このノートを通して、$(X, \leq)$ を半順序集合とする。すなわち、$\leq$ は集合 X 上の二項関係[*1]であり、(I) どの $x \in X$ についても $x \leq x$ である、(II) どの $x, y \in X$ についても、もし $x \leq y$ かつ $y \leq x$ であれば $x = y$ でもある、(III) どの $x, y, z \in X$ についても、もし $x \leq y$ かつ $y \leq z$ であれば $x \leq z$ でもある、という三つの条件を満たす。「$x \leq y$ かつ $x \neq y$」のことを $x < y$ で表す。

X の部分集合 C が X の**鎖**（さ）であるとは、どの $x, y \in C$ についても x と y が比較可能である（つまり、$x \leq y$ もしくは $y \leq x$ である）ことと定める。定義より、鎖 C の部分集合 C' もまた鎖である[*2]。

$x \in X$ が鎖 $C \subseteq X$ の**上界**であるとは、どの $y \in C$ についても $y \leq x$ が成り立つことと定める。また、$x \in X$ が鎖 $C \subseteq X$ の**真の上界**であるとは、どの $y \in C$ についても $y < x$ が成り立つことと定める。なお、後者の条件は「x が C の上界であり、かつ $x \notin C$ である」ことと同値である[*3]。

半順序集合 $(X, \leq)$ が**帰納的**であるとは、X の鎖 C はどれも X の中に上界をもつことと定める。(特にこのとき、空集合 $C := \emptyset$ が X の鎖であることから、X にはその上界が存在し、したがって X は空でないことを注意しておく。)

$x \in X$ が**極大**であるとは、$x < y$ を満たす元 $y \in X$ は存在しないことと定める。また、鎖 $C \subseteq X$ の元 $x \in C$ が C の**最大元**である（この元を $\max C$ で表す）とは、どの $y \in C$ についても $y \leq x$ である、言い換えると、x が C の上界であることと定める。

これらの定義のもと、Zorn の補題とは

> どの帰納的な半順序集合 $(X, \leq)$ も極大元をもつ

という主張である。

[*1] X の元 x, y が与えられると、「$x \leq y$」という関係が成り立つか否かが定まる状況にある、ということである。

[*2] $x, y \in C'$ について、$C' \subseteq C$ であることから $x, y \in C$ でもあり、鎖 C の定義より x と y は比較可能である。

[*3] x が C の真の上界であるとき、もし $x \in C$ であるとすると、$y := x \in C$ について条件 $y < x$ が成り立たず矛盾する。逆に「　」部の条件が成り立つとき、どの $y \in C$ についても、$y \leq x$ かつ $y \neq x$（$x \notin C$ であるので）、したがって $y < x$ となる。

Zorn の補題の証明

X の鎖全体の集合を $\mathcal{T}$ で表す。また、鎖 $C \in \mathcal{T}$ について、

$$\overline{U}_C := \{x \in X : x \text{ は } C \text{ の上界}\}, \, U_C := \{x \in X : x \text{ は } C \text{ の真の上界}\} = \overline{U}_C \setminus C$$

と定める。すると、C の最大元 $\max C$ が存在すれば $\overline{U}_C = U_C \cup \{\max C\}$ であり、そうでなければ $\overline{U}_C = U_C$ である[*4]。このことから、

$$\text{もし } x \in \overline{U}_C \text{ と } y \in X \text{ が } x < y \text{ を満たせば、} y \in U_C \text{ である}^{*5}\text{。} \tag{1}$$

さらに、

$$\text{鎖 } C_1, C_2 \in \mathcal{T} \text{ について、} U_{C_1} \not\subseteq U_{C_2} \text{ であれば } C_1 \cap \overline{U}_{C_2} = \emptyset \text{ が成り立つ}^{*6}\text{。} \tag{2}$$

さて、選択公理により、X の空でない部分集合の族の選択関数 f_0 が存在する。すなわち、X の空でない部分集合 Y について常に $f_0(Y) \in Y$ が成り立つ。これを踏まえて、関数 $f \colon \mathcal{T} \to X$ を、鎖 $C \in \mathcal{T}$ について以下で定義する。

$$f(C) := \begin{cases} f_0(U_C) \in U_C \subseteq X \setminus C & (U_C \neq \emptyset \text{ のとき}) \\ \max C \in C \cap \overline{U}_C & (U_C = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

($U_C = \emptyset$ の場合には、$(X, \leq)$ が帰納的という仮定から存在が保証される C の上界は実際には C の元でもあり、したがって $\max C$ が存在する。)この構成より、

$$\text{鎖 } C_1, C_2 \in \mathcal{T} \text{ について、} U_{C_1} = U_{C_2} \neq \emptyset \text{ であれば } f(C_1) = f(C_2) \in U_{C_1} \ (= U_{C_2}) \text{ が成り立つ。} \tag{3}$$

$\mathcal{T}$ の部分集合 $\mathcal{C}_0$ を、以下の条件 (i-C) を満たす鎖 $C \in \mathcal{T}$ 全体の集合と定める。

(i-C) C の部分集合 S について、$U_S \not\subseteq U_C$ であれば $f(S) \in C$ が成り立つ。

そして、$\mathcal{C}_0$ の部分集合 $\mathcal{C}$ を、以下の条件 (ii-C) を満たす鎖 $C \in \mathcal{C}_0$ 全体の集合と定める。

(ii-C) どの $C' \in \mathcal{C}_0$ についても $C \subseteq C' \cup U_{C'}$ が成り立つ。

$C^* := \bigcup \mathcal{C}$ と定める。このとき $C^* \in \mathcal{C}$ である。実際、以下のように C^* は $\mathcal{C}$ の定義の各条件を満たす。

(ii-C^*): $C' \in \mathcal{C}_0$ とする。各 $C \in \mathcal{C}$ について条件 (ii-C) より $C \subseteq C' \cup U_{C'}$ であり、したがって $C^* = \bigcup \mathcal{C} \subseteq C' \cup U_{C'}$ である。

$C^* \in \mathcal{T}$: $x, y \in C^*$ とする。C^* の定義より、ある $C, C' \in \mathcal{C}$ について $x \in C$ かつ $y \in C'$ となる。条件 (ii-C) より $C \subseteq C' \cup U_{C'}$ であるので、$x, y \in C'$ であるか(すると $C' \in \mathcal{T}$ より x, y は比較可能である)、もしくは $x \in U_{C'}$ である(すると $y < x$ である)。いずれにしても x と y は比較可能である。

(i-C^*): $S \subseteq C^*$ かつ $U_S \not\subseteq U_{C^*} = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} U_C$ とする[*7]。このときある $C \in \mathcal{C}$ について $U_S \not\subseteq U_C$ である。すると性質 (2) より $S \cap U_C = \emptyset$ であり、一方で条件 (ii-C^*) を $C \in \mathcal{C}_0$ に適用して $S \subseteq C^* \subseteq C \cup U_C$

---

*4 元 x が $\overline{U}_C \setminus U_C$ に属することは、x が C の上界でありかつ $x \in C$ であること、すなわち $x = \max C$ と同値である。

*5 どの $z \in C$ についても $z \leq x < y$ より $z \leq y$ である。一方、もし $y \in C$ とすると $y \leq x$ となるが、これは $x < y$ と矛盾する。

*6 もし $x \in C_1 \cap \overline{U}_{C_2}$ とすると、どの $y \in U_{C_1}$ についても、U_{C_1} の定義より $x < y$ となり、したがって性質 (1) より $y \in U_{C_2}$ となる。これは $U_{C_1} \not\subseteq U_{C_2}$ と矛盾する。

*7 後半の等号については、C^* が C たちの和集合であることから、「どの $y \in C^*$ についても $y < x$」は「どの C についても『どの $y \in C$ についても $y < x$』」と同値である。

が得られる。これらを合わせると $S \subseteq C$ となる。この S に条件 (i-C) を適用すると $f(S) \in C \subseteq C^*$ となり、$f(S) \in C^*$ が成り立つ。

さて、もし $U_{C^*} = \emptyset$ であれば、$f(C^*) = \max C^*$ は X の極大元であり（もし $\max C^* < y$ を満たす元 y があれば、性質 (1) より $y \in U_{C^*}$ となってしまうため)、主張が成り立つ。あとは $U_{C^*} \neq \emptyset$（したがって、$f(C^*) \in U_{C^*}$）と仮定して矛盾を導けばよい。$u := f(C^*) \in U_{C^*}$ および $C^{**} := C^* \cup \{u\}$ と定める。$u = \max C^{**} \notin C^*$ かつ $C^{**} \nsubseteq C^*$ であり、C^* と同じく C^{**} も鎖である[*8]。さらに $C^{**} \in \mathcal{C}$ である。実際、以下のように C^{**} は $\mathcal{C}$ の定義の残る条件を満たす。

(i-C^{**})： $S \subseteq C^{**}$ かつ $U_S \nsubseteq U_{C^{**}}$ とする。性質 (2) より $S \cap \overline{U}_{C^{**}} = \emptyset$ であり、$u = \max C^{**} \in \overline{U}_{C^{**}}$ より $u \notin S$ である。よって $S \subseteq C^*$、したがって $U_{C^*} \subseteq U_S$ となる[*9]。ここで、$U_S \subseteq U_{C^*}$ の場合には $U_S = U_{C^*} \neq \emptyset$ となるので性質 (3) より $f(S) = f(C^*) = u \in C^{**}$ となり、一方で $U_S \nsubseteq U_{C^*}$ の場合には条件 (i-C^*) を $S \subseteq C^*$ に適用して $f(S) \in C^* \subseteq C^{**}$ となる。いずれにしても $f(S) \in C^{**}$ である。

(ii-C^{**})： $C' \in \mathcal{C}_0$ とする。条件 (ii-C^*) より $C^* \subseteq C' \cup U_{C'}$ である。あとは $u \in C' \cup U_{C'}$、言い換えると、もし $u \notin U_{C'}$ であれば $u \in C'$ となることを示せばよい。この状況では、$u \in U_{C^*}$ より $U_{C^*} \nsubseteq U_{C'}$ であるので、性質 (2) より $C^* \cap U_{C'} = \emptyset$ となるが、一方で上記のように $C^* \subseteq C' \cup U_{C'}$ であったから、$C^* \subseteq C'$ となる。よって、条件 (i-C') を $C^* \subseteq C'$ に適用して、$u = f(C^*) \in C'$ となる。

しかし、この事実 $C^{**} \in \mathcal{C}$ は $C^{**} \nsubseteq C^* = \bigcup \mathcal{C}$ であることと矛盾する。これで証明が完了した。 □

おまけ：超限帰納法を用いた証明

このおまけでは、比較のために、超限帰納法を用いて選択公理から Zorn の補題を導く証明を与える。最初に、超限再帰的定義に関する原理を述べておく（例えば [1, 第 I 章定理 9.3] を参照)。

定理 1. $\varphi(x, y)$ を（Zermelo–Fraenkel 集合論における）式で自由変数 x と y をもち、$\forall x \exists! y \varphi(x, y)$ を満たすものとする。このとき、自由変数 x と y をもつ式 $\Phi(x, y)$ で以下の二つの条件を満たすものが存在する。

1. $\forall x((x \in \mathbf{ON} \to \exists! y \Phi(x, y)) \wedge (\neg x \in \mathbf{ON} \to \neg \exists y \varphi(x, y)))$
2. $\forall x(x \in \mathbf{ON} \to \forall y, z(y = \Phi\restriction_x \wedge \varphi(y, z) \to \Phi(x, z)))$

ただし、「$x \in \mathbf{ON}$」は「x は順序数」の略記とし、「$\Phi\restriction_x$」は集合 $\{\langle a, b\rangle \mid a \in x \wedge \Phi(a, b)\}$（$\langle a, b\rangle$ は a と b の順序対）の略記とする。

この定理の直感的な意味は以下の通りである：順序数全体（これは集合をなさないのであるが）で定義される「関数」Φ を得たいとき、順序数 α における値を α より小さな順序数における値から定める方法を指定すれば、その条件を満たす「関数」Φ が確かに存在する。この定理は ZF 集合論における定理であり、選択公理は用いていないことを注意しておく。

定理 1（と超限帰納法）を用いて、選択公理から Zorn の補題を証明する。$X \neq 0\ (= \emptyset)$ を、Zorn の補題の主張に現れる半順序集合とする。背理法の仮定として、X は極大元をもたないと仮定する。すると、X の空でな

[*8] C^{**} の元 x と y が比較可能であることを示す際に、x か y の少なくとも一方が $u = \max C^{**}$ であれば $\max C^{**}$ の定義より x と y は確かに比較可能であり、そうでなければ $x, y \in C^*$ となるので鎖 C^* の性質より x と y はやはり比較可能である。

[*9] S の元はどれも C^* の元でもあるので、「どの $y \in C^*$ についても $y < x$」であれば「どの $y \in S$ についても $y < x$」でもある。

い部分集合 C のうち、ある順序数と同型な（特に全順序集合である）ものの各々について、選択公理を用いて C の上界 $b_C \in X \setminus C$ を一つずつ選ぶことができる。

定理 1 を適用すべく、まず X の元 a を一つ固定しておき、式 $\varphi(x, y)$ を以下の要領で定義する。

- $x = 0$ のとき、$\varphi(x, y)$ は $y = a$ を意味するように定める。
- x がある順序数 $\alpha > 0$ から X への関数であって像 $\mathrm{Im}(x)$ への（半順序集合としての）同型写像であるとき、$\varphi(x, y)$ は $y = b_{\mathrm{Im}(x)}$ を意味するように定める（$\mathrm{Im}(x)$ は空でない順序数 α と同型なので、$b_{\mathrm{Im}(x)}$ が確かに定義されることを注意しておく）。
- それ以外のとき、$\varphi(x, y)$ は $y = 0$ を意味するように定める。

この式 $\varphi(x, y)$ は定理 1 の前提を満たすので、定理の主張にあるような式 $\Phi(x, y)$ が存在する。ここで以下の補題が成り立つ。

補題 1. x を順序数とし、x' を $\Phi(x, x')$ が成り立つ唯一の元とする。このとき、

1. $x' \in X$ である。
2. $y < x$ かつ $\Phi(y, y')$ が成り立つならば、X において $y' < x'$ である。

証明. x に関する超限帰納法を用いて証明する。まず、$x = 0$ のときは、φ の定義より $x' = a$ となるので、件の条件が成り立つ。次に $x > 0$ のときを考える。超限帰納法の仮定より、定理 1 の主張に現れる集合 $\Phi\restriction_x$ は x から X のある部分集合 C への同型写像となる（x は全順序集合であることを注意しておく）。このとき Φ と φ の定義より $x' = b_C$ となり、したがって件の条件は x に関しても成り立つ（二つ目の条件については、$b_C \in X \setminus C$ が C の上界であることから導かれる）。以上より主張が成り立つ。 □

補題 1 の二つ目の性質より、各 $v \in X$ について、$\Phi(x, v)$ を満たす順序数 x は高々一つしか存在しない。X の部分集合 X' を、ある（一意に定まる）順序数 x について $\Phi(x, v)$ が成り立つような $v \in X$ 全体の集合として定める。置換公理を集合 X' と式 $\Phi'(x, y) := \Phi(y, x)$ に適用すると、順序数 y のうち、$\Phi(y, y')$ を満たす唯一の y' が X' に属するような y をすべて要素にもつ集合 Y の存在が示される。ここで補題 1 の一つ目の性質より、この集合 Y はすべての順序数を要素にもつことになる。しかし、これは Burali–Forti の逆理（すなわち、すべての順序数を要素にもつ集合は存在しない、という定理）に矛盾する。したがって背理法により、X は極大元をもつ。以上で Zorn の補題が証明された。

参考文献

[1] ケネス・キューネン（著）、藤田博司（訳）、『集合論　独立性証明への案内』、日本評論社、2008 年

[2] J. Lewin, "A Simple Proof of Zorn's Lemma", Amer. Math. Monthly **98**(4) (1991), 353–354

[3] K. Nuida, "A Simple and Elementary Proof of Zorn's Lemma", Discrete Math. Lett. **13** (2024), 108–110

[4] H. Rubin, J. E. Rubin, "Equivalents of the Axiom of Choice, II", Second Edition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics vol.116, North-Holland, 1985