山戸の定理（二次方程式の複素数解を座標で理解する方法）解説　２０１１．０１．１０

山戸朋盟

二次方程式を解く時、その方程式の左辺をｙに関する二次式に直し、それを座標面に書いて、その二次曲線がｘ軸と交わるところを求め、その場所のｘの値を方程式の解として理解するという方法は、高校生なら誰でも学習することである。この方法の長所は、抽象的・観念的な代数という数の世界を、座標という目に見える具象の世界に表現し直し、学習者が直観的に納得できる表現に置き換える点であろう。

しかしこの方法は、方程式が実数解を持つ時しか使えない。その理由は、もちろん二次式がｘ軸と交わらないからである。しかし、実数解を持つ時は使えるが、虚数解を持つ時は使えないと言われると、何とか工夫して虚数解を持つ場合も出来るようにしたいと考えるのが人情である。というより、実数解をもつ時はグラフと式の間に相関関係があるが、虚数解をもつ時は何の関係もないというのは不自然というか、数学的ではないのではなかろうか。

また、虚数解も座標軸上に表現できれば、虚数、あるいは複素数の世界に対して、別の視点からの理解が生まれ、その結果として理解が深まるだろう。これから述べる方法は、私が２４歳ごろ（１９７６年ごろ）考えたもので、長い間忘れていたものだが、最近後輩の数学科の学生と話したことがきっかけで思いだし、まとめて世間に発表しようと思ったものである。

まず、誰でも知っている「図１」のような図を書いてみる。これはｘ＝ａ、ｙ＝ｂ（ｂ＞０）を頂点とする放物線のグラフである。話を単純化するため、x^2の係数を１とすると、このグラフの式は、

$$y = f(x) = (x - a)^2 + b$$

である。このグラフは、ｘ軸とｙ軸しかないから、もちろん実数の世界しか表せない。虚数の世界を表すためには、虚数を表現できる軸がなければならない。幸いにして我々の住む世界は三次元なので、ｘ軸とｙ軸が作る平面と直角に交わるｚ軸を加える。すると、図２のようになり、虚数解を含むグラフが現れる。

図１

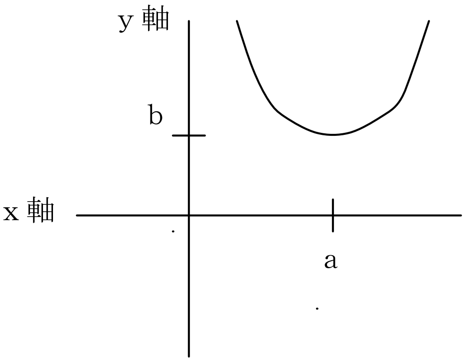
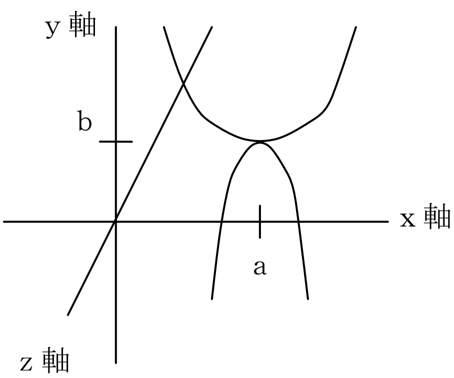


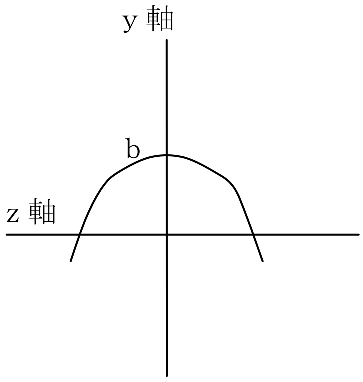
図２



f(x)の放物線の虚数を含む曲線はどこに現れるのか。結論を言うと、上の実数の放物線と頂点を共有して、その下に影のように同じ形で上下反対に、しかもｘ軸に対して直角に交わる平面、つまりｙ軸とｚ軸で作られる平面と平行な平面の上に現れる。これをｆ（ｘ）の虚のグラフと呼び、もとのグラフをｆ（ｘ）の実のグラフと呼ぶことにする。

このことを視覚的にもう少し正確に理解するために、図２の虚のグラフを、x 軸を延長した方向から眺めたグラフを書いてみよう。すると、図３になる。

図３



ここに表われているのは、ｆ（ｘ）の虚のグラフの、ｘ＝ａの平面におけるｙ座標・ｚ座標の値の集合である。ｙ＝０における

ｚの値は、$y=-z^2+b$、ｙ＝０　を解けばよい。

つまり　$z=\pm\sqrt{b}$　ただし、z軸は虚数の値を表す軸であり、また、これは　ｘ＝ａ　という条件のもとであるということを忘れてはいけない。

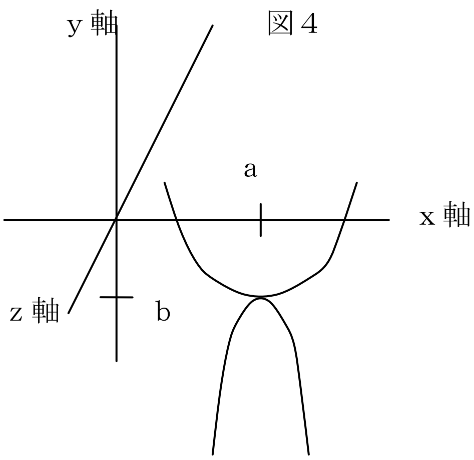
これを複素数的に表現すれば、

ｆ（ｘ）＝０の解は　$x=a\pm\sqrt{b}i$

ということになるのではないか。

このことをより一般的な理解に広げてみよう。
ｙに関する二次式のグラフをｘ、ｙ、ｚの三次元の座標で理解する時、
ｙ＝ｆ（ｘ、ｚ）と理解することが出来る。ｚは虚数の値を表す軸である。
そしてｂの値に関わらず、実のグラフと虚のグラフはいつも両方存在する。つまりｂ＜０の時は図４のようになる。

図４



この時、虚のグラフはｙ＝０の値をとることができないので、解に虚数は含まれず、解は実数となり、
$x=a\pm\sqrt{b}$　となる。
ｂ＝０の場合は、もちろん下の図５となる。

図５